# PHYSIK III

## C Wellen in drei Raumdimensionen

§12: Die Wellengleichung für ein schwingendes Gas: Schallwellen (02.11.05)

§13: Wellenausbreitung in Hohlräumen: Resonatoren (04.11.05)

§14: Wellen auf Flüssigkeitsoberflächen (07.11.05)

§15: Erzwungene Wellen & Green'sche Funktionen (09.11.05)

## D Überlagerung von Wellen

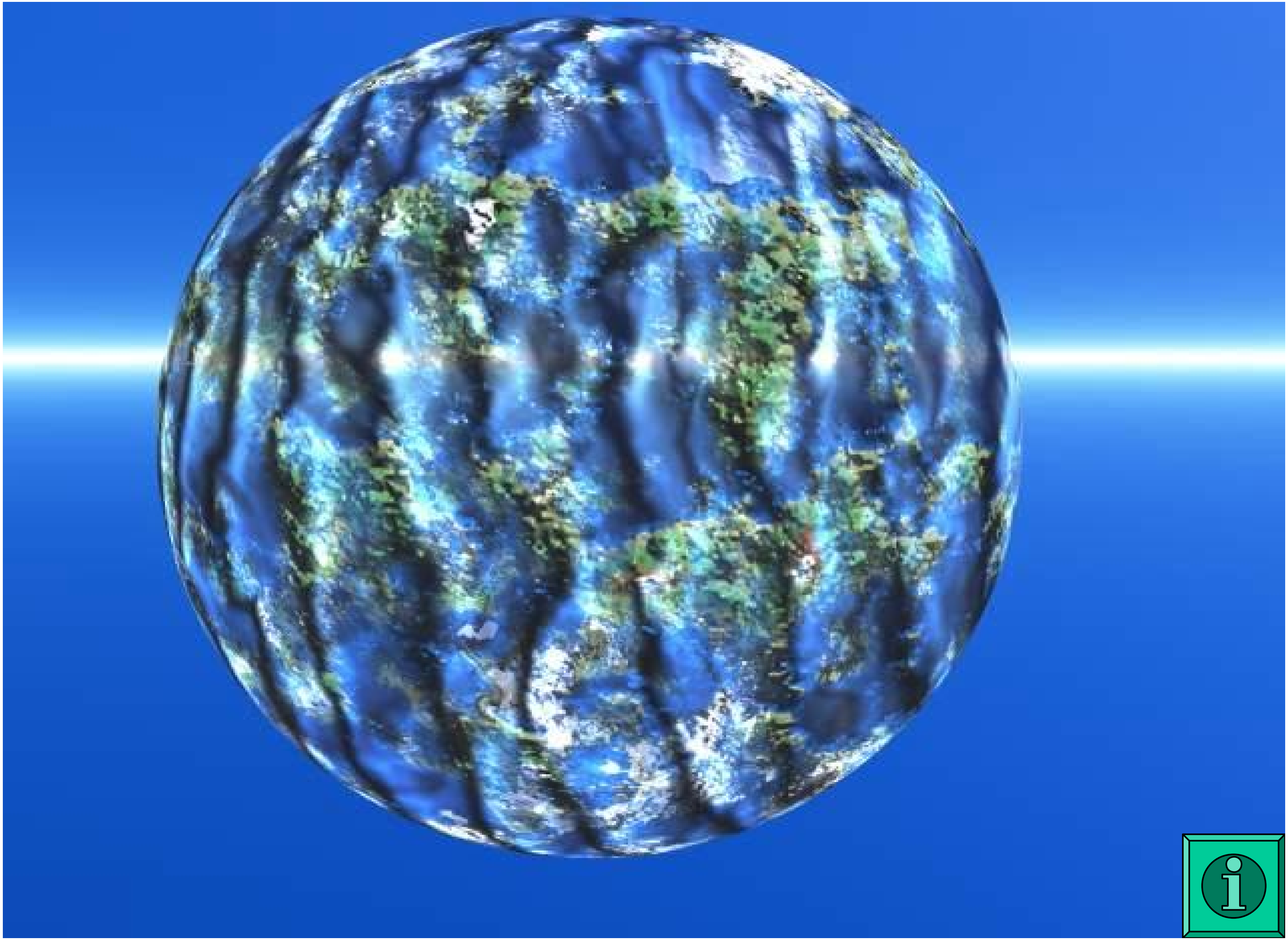
§16: Interferenz & Beugung (11.11.05)

§17: Stehende Wellen (14.11.05)

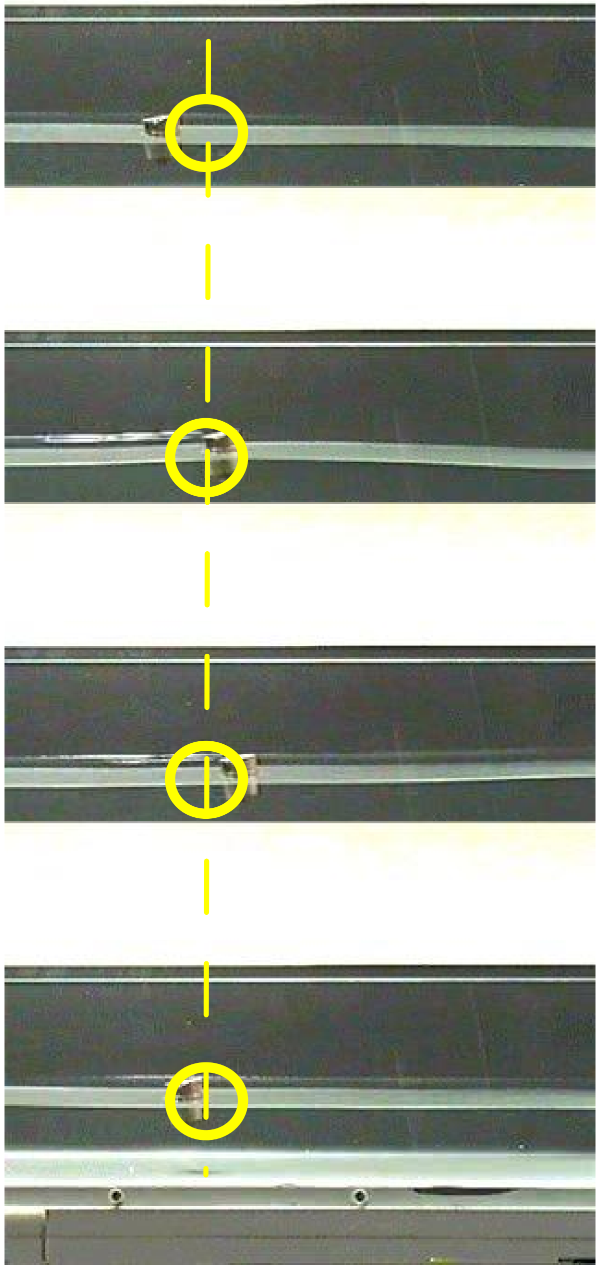
§18: Schwebungen & Wellenpakete (14.11.05)

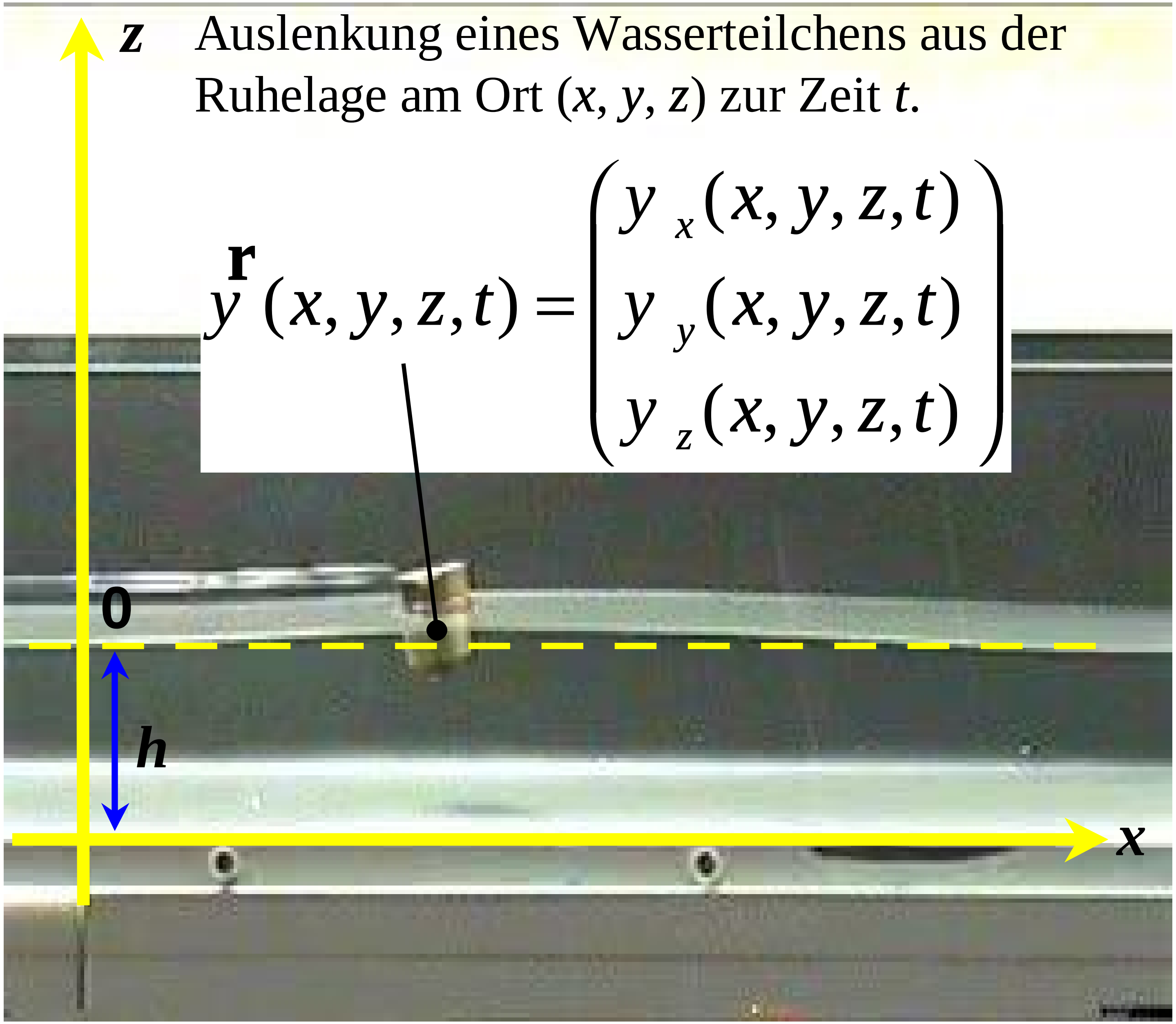
§19: Bewegte Quellen: Der Doppler-Effekt (16.11.05)

§20: Abschließendes zum Thema Wellen (16.11.05)



# Bezeichnungen für Wasserwellen

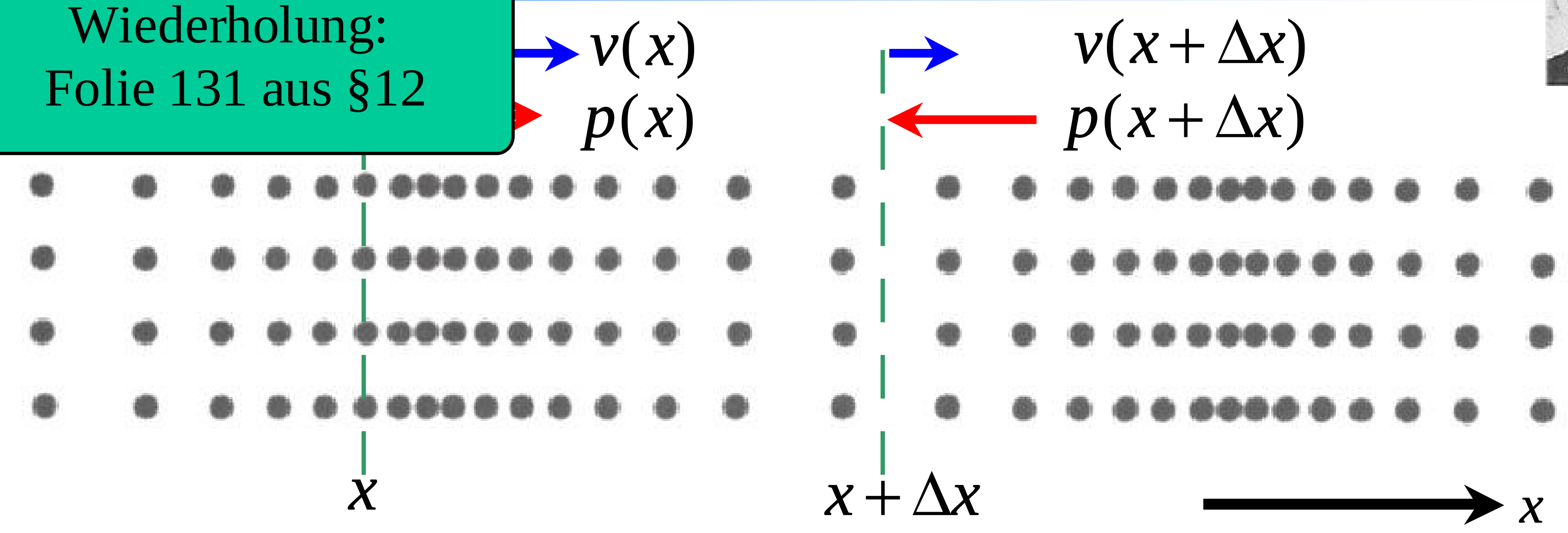





Auslenkung eines Wasserteilchens aus der Ruhelage am Ort $(x, y, z)$ zur Zeit $t$.

$$\vec{y}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} y_x(x,y,z,t) \\ y_y(x,y,z,t) \\ y_z(x,y,z,t) \end{pmatrix}$$

Wiederholung:
Folie 131 aus §12




Der Masse $m = r A\Delta x$ des Volumenelementes $V$ wird dann nach dem 2. Newton‘schen Gesetz die folgende Beschleunigung erteilt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \frac{-\frac{\partial p}{\partial x} A\Delta x}{r\, A\Delta x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$v$ ist hierbei die Geschwindigkeit des Mediums. Sie kann von Ort zu Ort wechseln, also $v = v(x)$, und wird als die „Schallschnelle“ bezeichnet.

# Annahmen zur Berechnung von Wasserwellen

(i) Alle $v^2$ – Terme fallen weg $\Rightarrow \quad \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

(ii) Lösung nicht von $y$ abhängig $\Rightarrow$ 2D Betrachtung möglich

$$\vec{\psi}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \psi_x(x,z,t) \\ \psi_z(x,z,t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} v_x(x,z,t) \\ v_z(x,z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \psi_x / \partial t \\ \partial \psi_z / \partial t \end{pmatrix}$$

(iii) Spezielle harmonische Lösungsansätze:

$$\vec{v}(x,z,t) = \begin{pmatrix} V_x(z) \\ V_z(z) \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}, \quad p(x,z,t) = P(z)\, e^{i(kx-\omega t)}$$

(iv) Flüssigkeit inkompressibel $\rho = const. \Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0,\text{da } \rho = const.} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

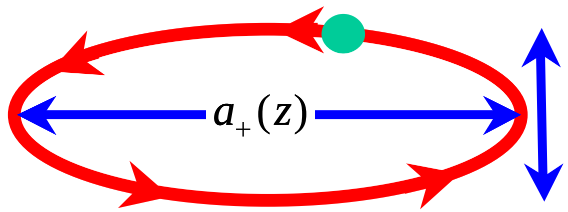
# Die Bahn der Flüssigkeitsteilchen bei Wasserwellen

$$\vec{y}(x,z,t)=\int_0^t \vec{v}(x,z,t')dt'$$

$$=-\frac{A}{w}\begin{pmatrix}\cos(kx-wt)\left(e^{kz}+e^{-2kh}e^{-kz}\right)\\ \sin(kx-wt)\left(e^{kz}-e^{-2kh}e^{-kz}\right)\end{pmatrix}+\vec{y}_0$$

$$\tilde{A}=-\frac{A}{w},\quad a_+(z)=e^{kz}+e^{-2kh}e^{-kz},\quad a_-(z)=e^{kz}-e^{-2kh}e^{-kz}$$

$$\Rightarrow \vec{y}(x,z,t)=\tilde{A}\begin{pmatrix}a_+(z)\cos(kx-wt)\\ a_-(z)\sin(kx-wt)\end{pmatrix}$$




$\Rightarrow$ Für festes $z$ ist dies ist die Parameterdarstellung einer Ellipse.

# (i) Tiefwasserwelle

Bei einer Tiefwasserwelle bewegen sich die Teilchen auf Kreisbahnen mit exponentiell abklingendem Radius:

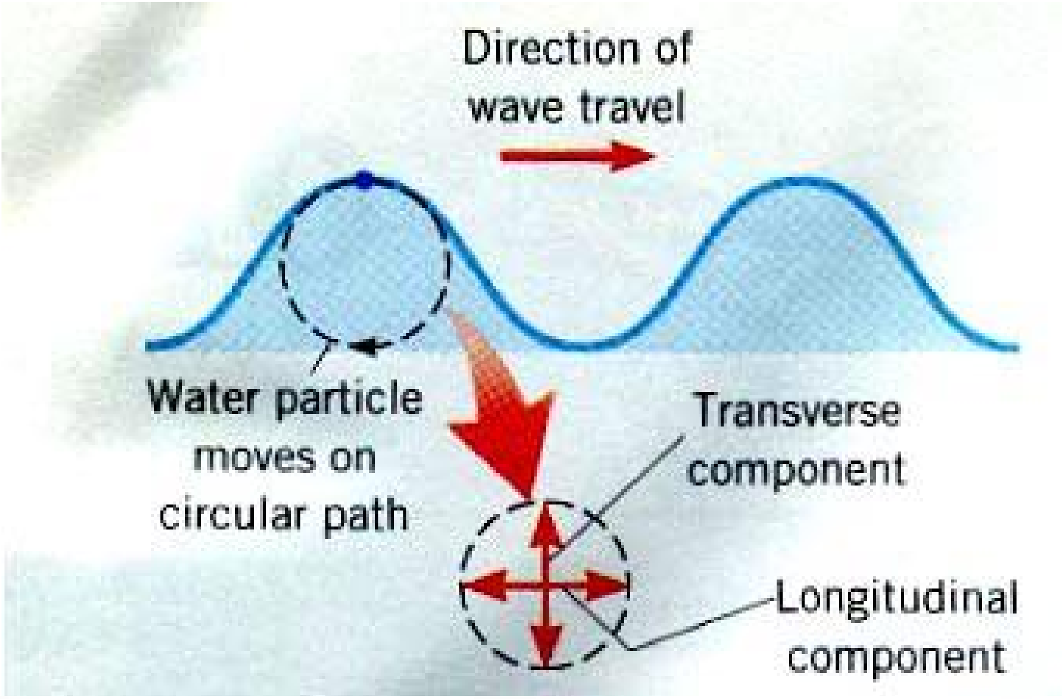
$$kh \gg 1 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \ h \gg \frac{\lambda}{2\pi} \quad \Rightarrow a_+(z) \approx a_-(z) \approx e^{kz}$$

$$\vec{y}(x,z,t) = \tilde{A}\begin{pmatrix} \cos(kx-\omega t) \\ \sin(kx-\omega t) \end{pmatrix} e^{kz} \Rightarrow \text{ Kreisbewegung !}$$

$$\Rightarrow \vec{y}(x,z=-\lambda,t) = \tilde{A}\begin{pmatrix} \cos(kx-\omega t) \\ \sin(kx-\omega t) \end{pmatrix} e^{-2\pi}$$

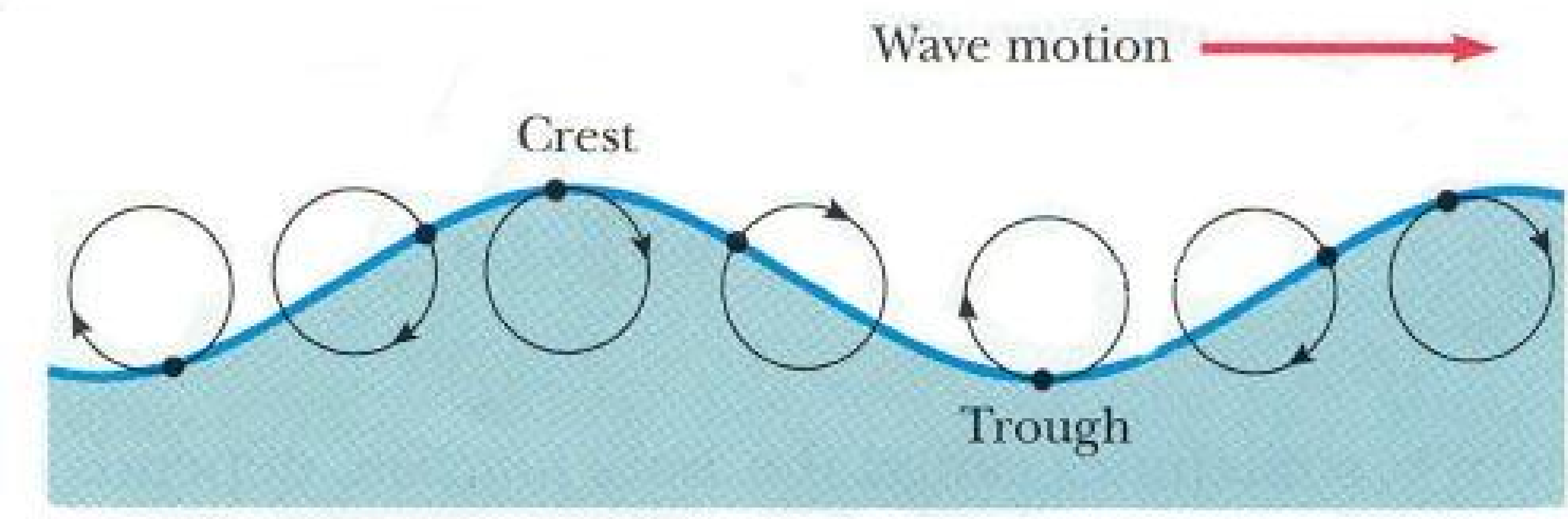
$$e^{-2\pi} \approx 1/500$$

$\Rightarrow$ In der Tiefe einer Wellenlänge ist die Amplitude der Auslenkung der Wasserteilchen bei einer Tiefwasserwelle praktisch Null !




An der Oberfläche einer ebenen Tiefwasserwelle bewegen sich die Teilchen auf einer Kreisbahn:

$$\vec{y}(x,0,t) = \tilde{A}\begin{pmatrix}\cos(kx-wt)\\ \sin(kx-wt)\end{pmatrix}$$



## (ii) Seichtwasserwelle

Bei einer Seichtwasserwelle ist die waagerechte Auslenkung der Teilchen unabhängig von der Tiefe bei linear abnehmender senkrechter Auslenkung:

$$kh = 1 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad h = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\Rightarrow a_+(z) \approx 2, \qquad a_-(z) \approx \left(1 + kz - (1 - 2kh)(1 - kz)\right) \approx 2k(z+h)$$

$$\vec{\psi}(x,z,t) = \tilde{A}\begin{pmatrix} 2\cos(kx - \omega t) \\ 2k(z+h)\sin(kx - \omega t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \text{unabhängig von Tiefe} \\ \Rightarrow \text{nimmt linear mit Tiefe ab} \end{matrix}$$

$$\vec{\psi}(x, z = -h, t) = 2\tilde{A}\begin{pmatrix} \cos(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

## (iii) Allgemeiner Fall

Allgemein bewegen sich die Wasserteilen auf Ellipsenbahnen, die mit zunehmender Tiefe zusammengedrückt werden:

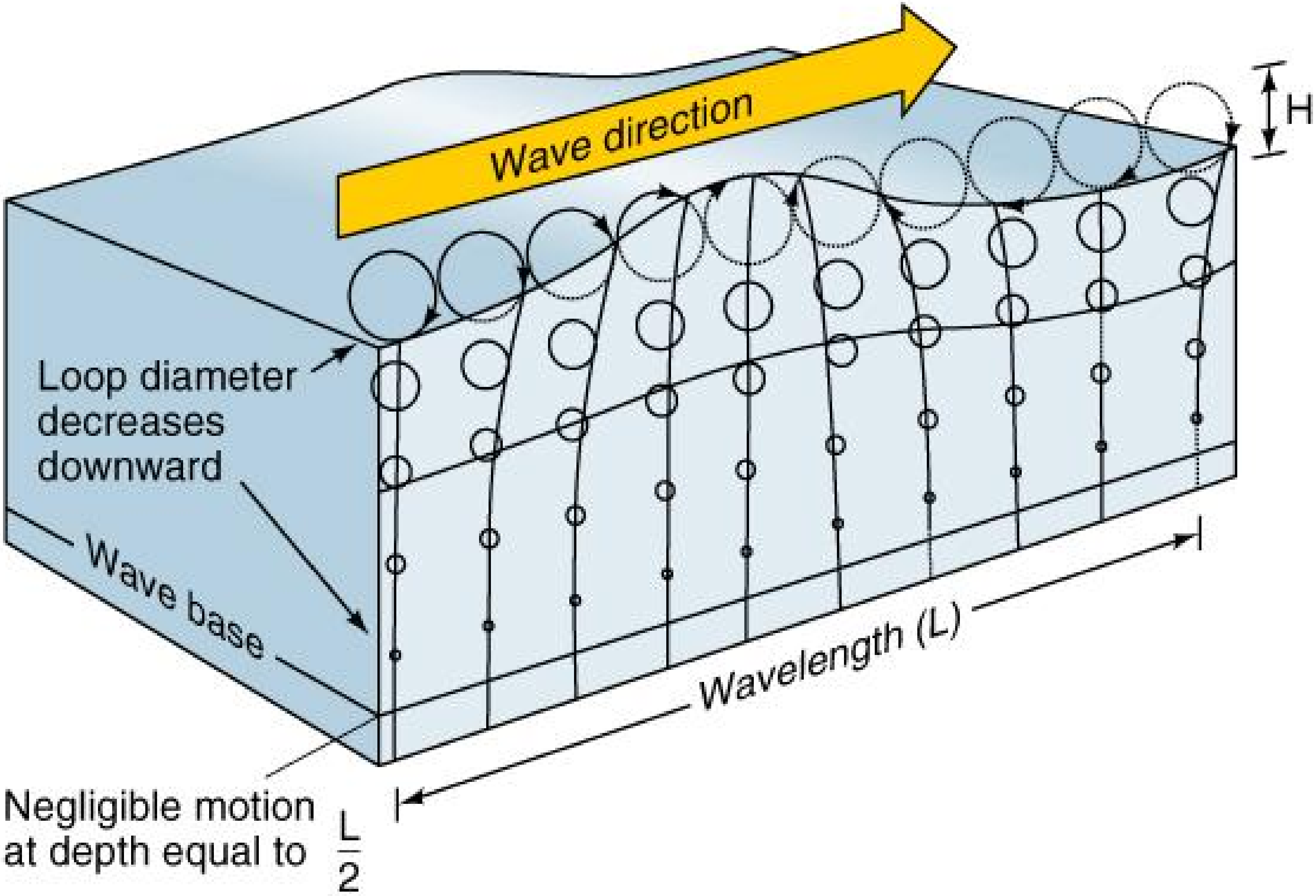
$$kh : 1 \Rightarrow k = \frac{2p}{l}, \quad h : \frac{l}{2p}$$

$$\vec{y}(x,z,t) = \tilde{A}\begin{pmatrix} a_+(z)\cos(kx - wt) \\ a_-(z)\sin(kx - wt) \end{pmatrix}$$

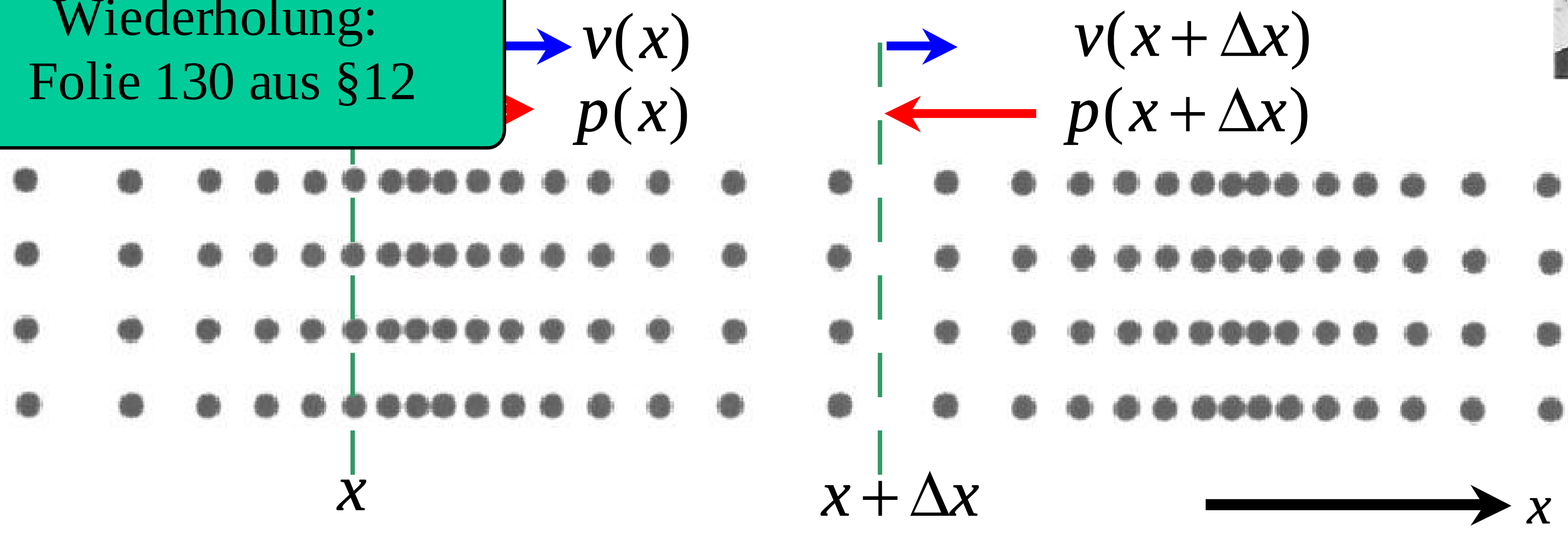
$$a_+(z) = e^{kz} + e^{-2kh}e^{-kz} = 2e^{-kh}\cosh(z+h)$$

$$a_-(z) = e^{kz} - e^{-2kh}e^{-kz} = 2e^{-kh}\sinh(z+h)$$

$$\Rightarrow \vec{y}(x,z,t) = 2e^{-kh}\tilde{A}\begin{pmatrix} \cosh(z+h)\cos(kx - wt) \\ \sinh(z+h)\sin(kx - wt) \end{pmatrix}$$


Wave direction
H
Loop diameter
decreases
downward
Wave base
Wavelength (L)
Negligible motion
at depth equal to $\frac{L}{2}$

Wiederholung:
Folie 130 aus §12



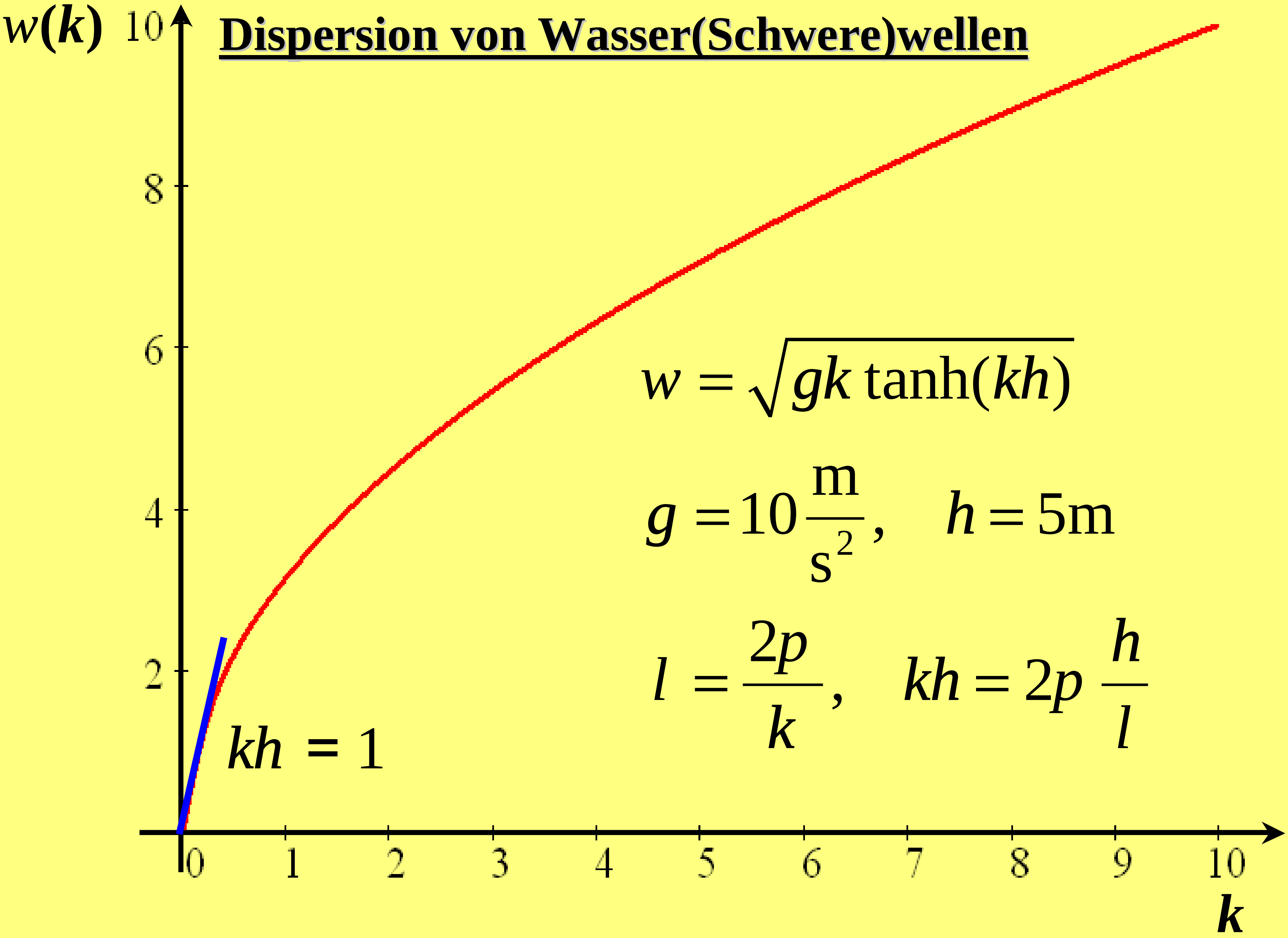

Wir betrachten eine Flüssigkeits- oder Gassäule vom Querschnitt *A*, in der der Druck sich in *x*-Richtung (längs der Säulenachse) ändert: $p = p(x)$

Auf ein Volumenelement $V = A\Delta x$ wirkt dann die Kraft:

$$F = A\big(p(x) - p(x+\Delta x)\big) \approx A\left(p(x) - p(x) - \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} A\Delta x$$

# Dispersion von Wasser(Schwere)wellen




$$w = \sqrt{gk \tanh(kh)}$$

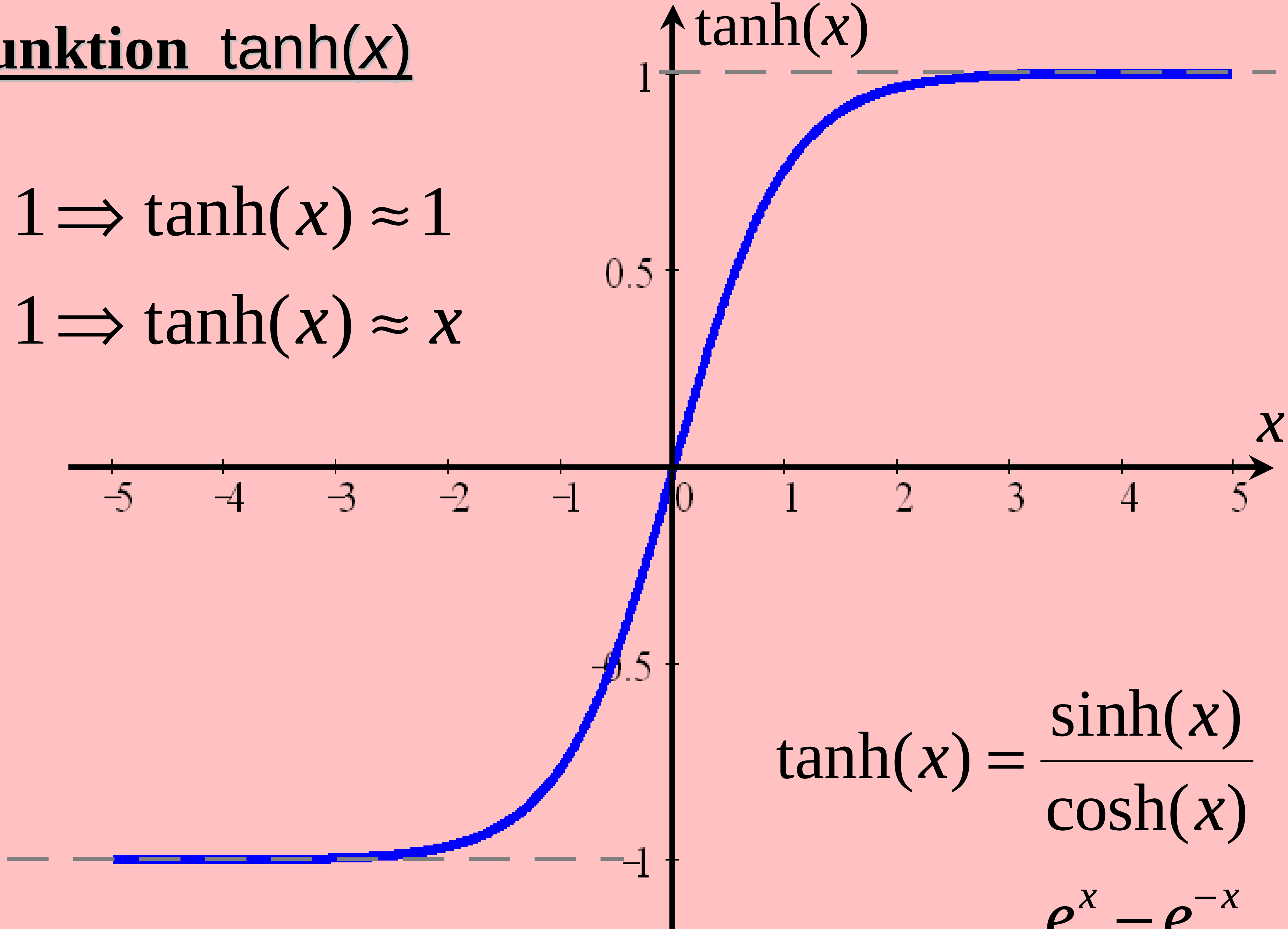
$$g = 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad h = 5\mathrm{m}$$

$$l = \frac{2p}{k}, \quad kh = 2p\frac{h}{l}$$

# Die Funktion tanh(*x*)

$$x \ ? \ 1 \Rightarrow \tanh(x) \approx 1$$

$$x = 1 \Rightarrow \tanh(x) \approx x$$




$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$w(k) = \sqrt{gk \tanh(kh)}$$

(i) Tiefwasserwellen: $kh$ **?** 1

$$\Rightarrow \tanh(kh) \approx 1 \Rightarrow w(k) = \sqrt{gk} = k\sqrt{\frac{g}{k}} = kc$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{g\,l}{2p}} \Rightarrow \text{Tiefwasserwellen zeigen Dispersion.}$$

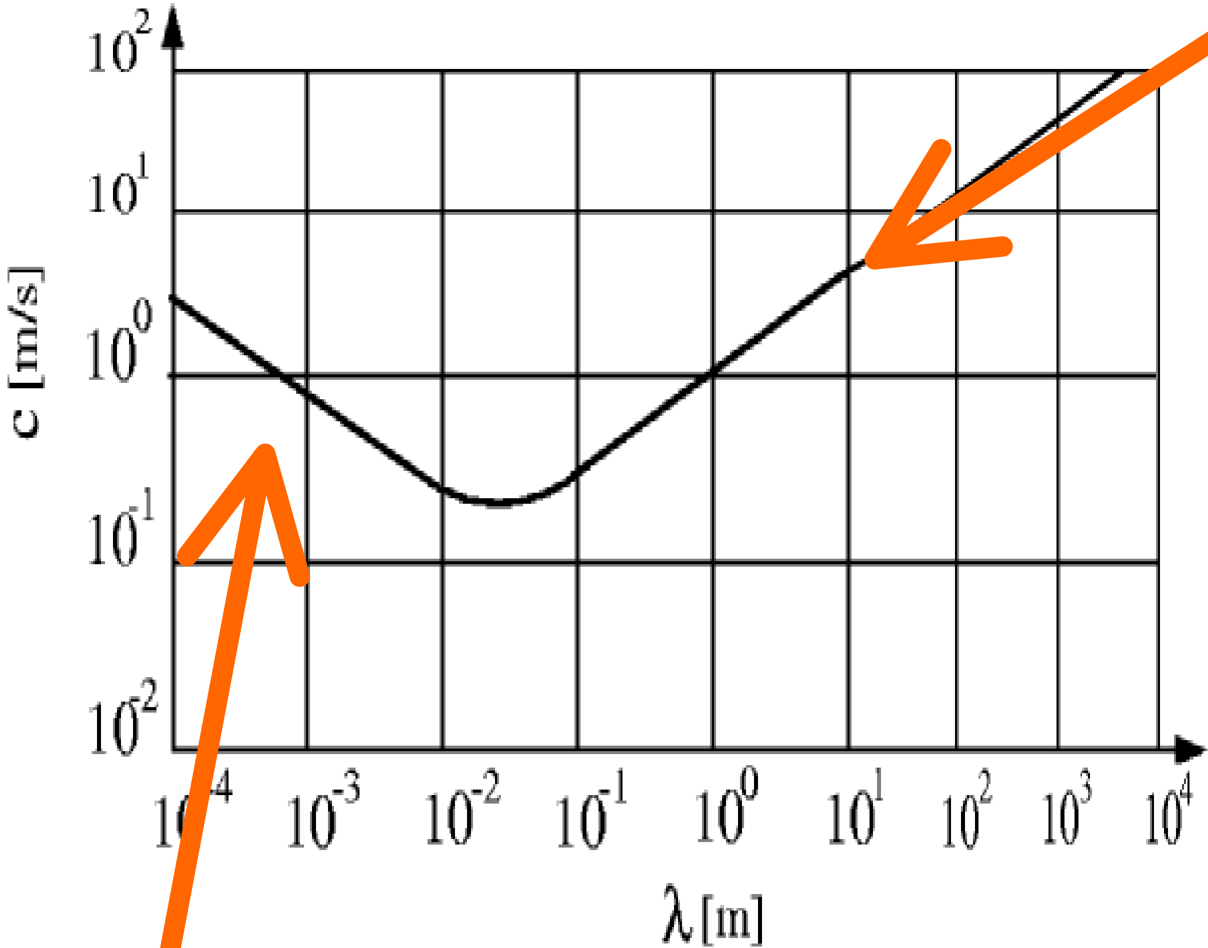
(ii) Seichtwasserwellen: $kh$ **=** 1

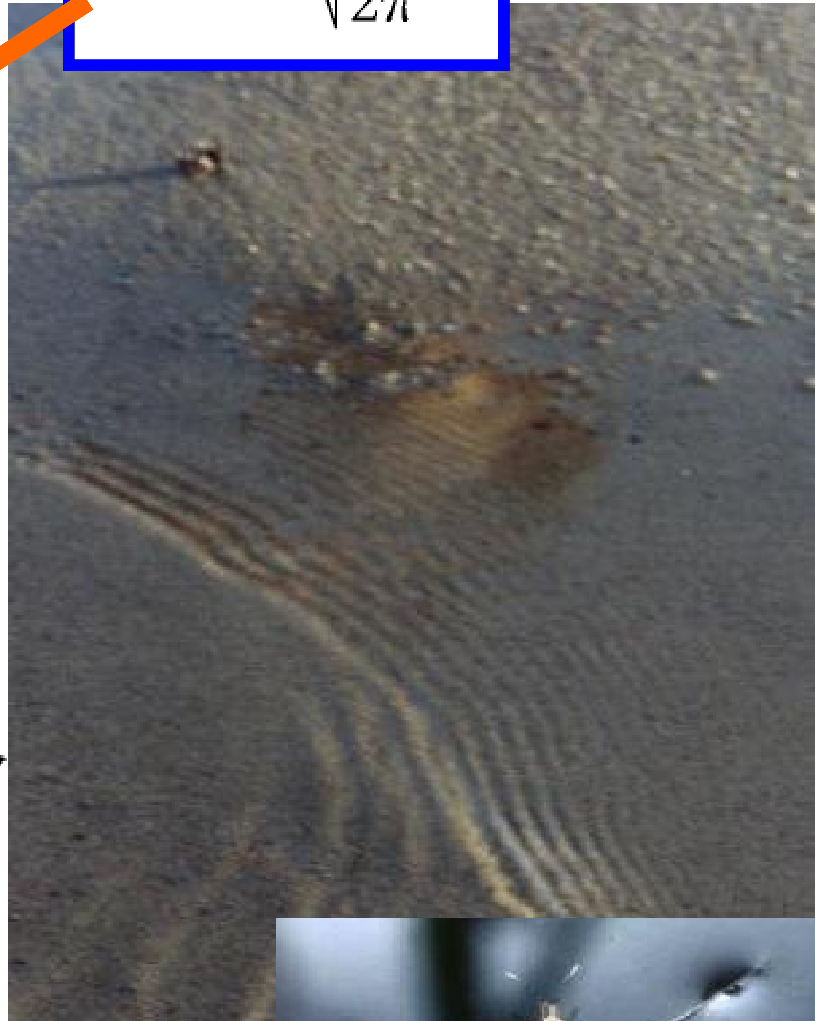
$$\Rightarrow \tanh(kh) \approx kh \Rightarrow w(k) = \sqrt{gk^2h} = k\sqrt{gh} = kc$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{gh} \Rightarrow \text{Seichtwasserwellen sind dispersionsfrei.}$$

$$c_{\text{grav}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

# Dispersion von Kapillarwellen

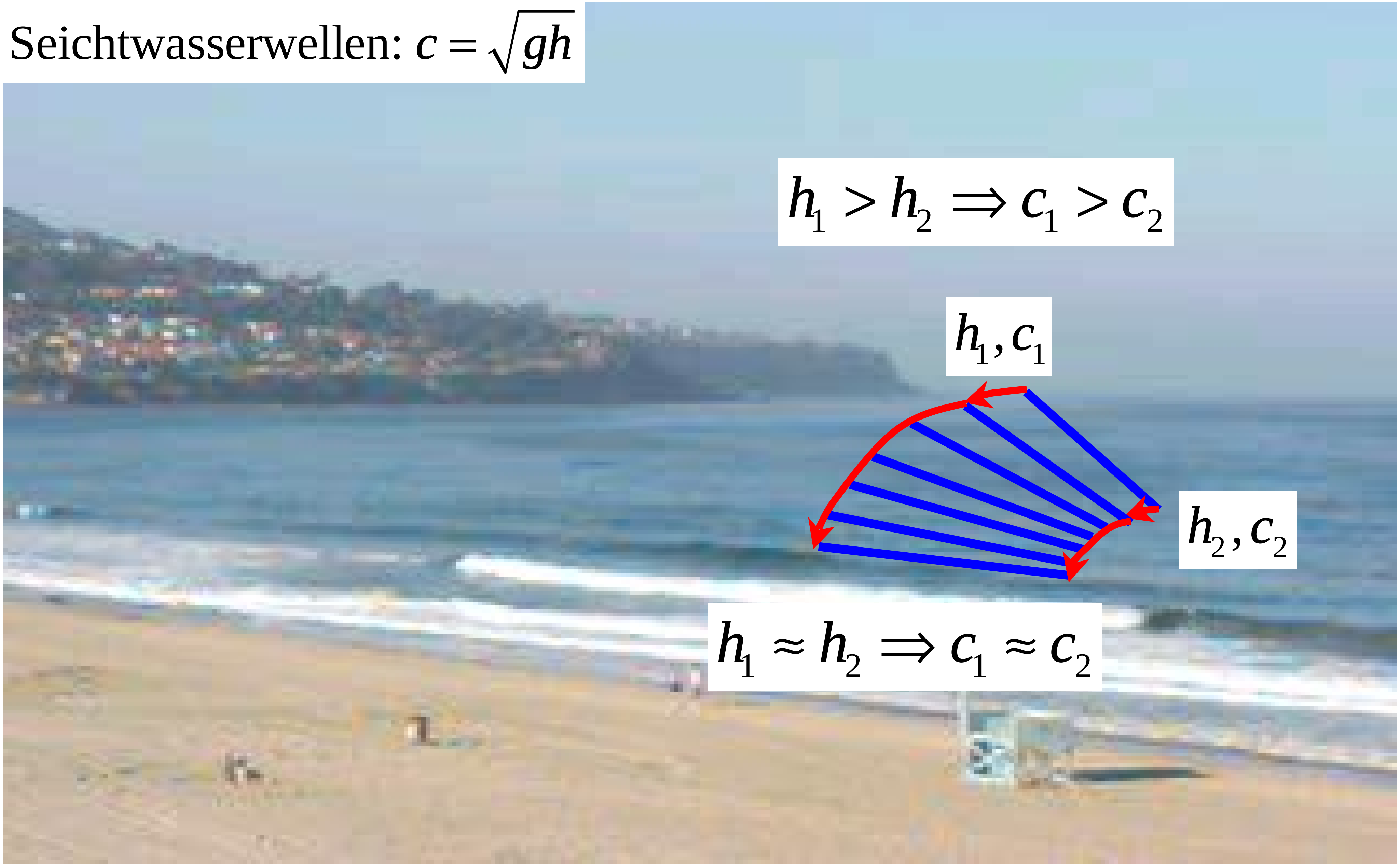


$$c_{\text{kap}} = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$$

Bei kleinen Wellenlängen überwiegt die Oberflächenspannung γ als rücktreibende Kraft.

Beispiel 1: Warum trifft die Brandung immer senkrecht auf den Strand ?



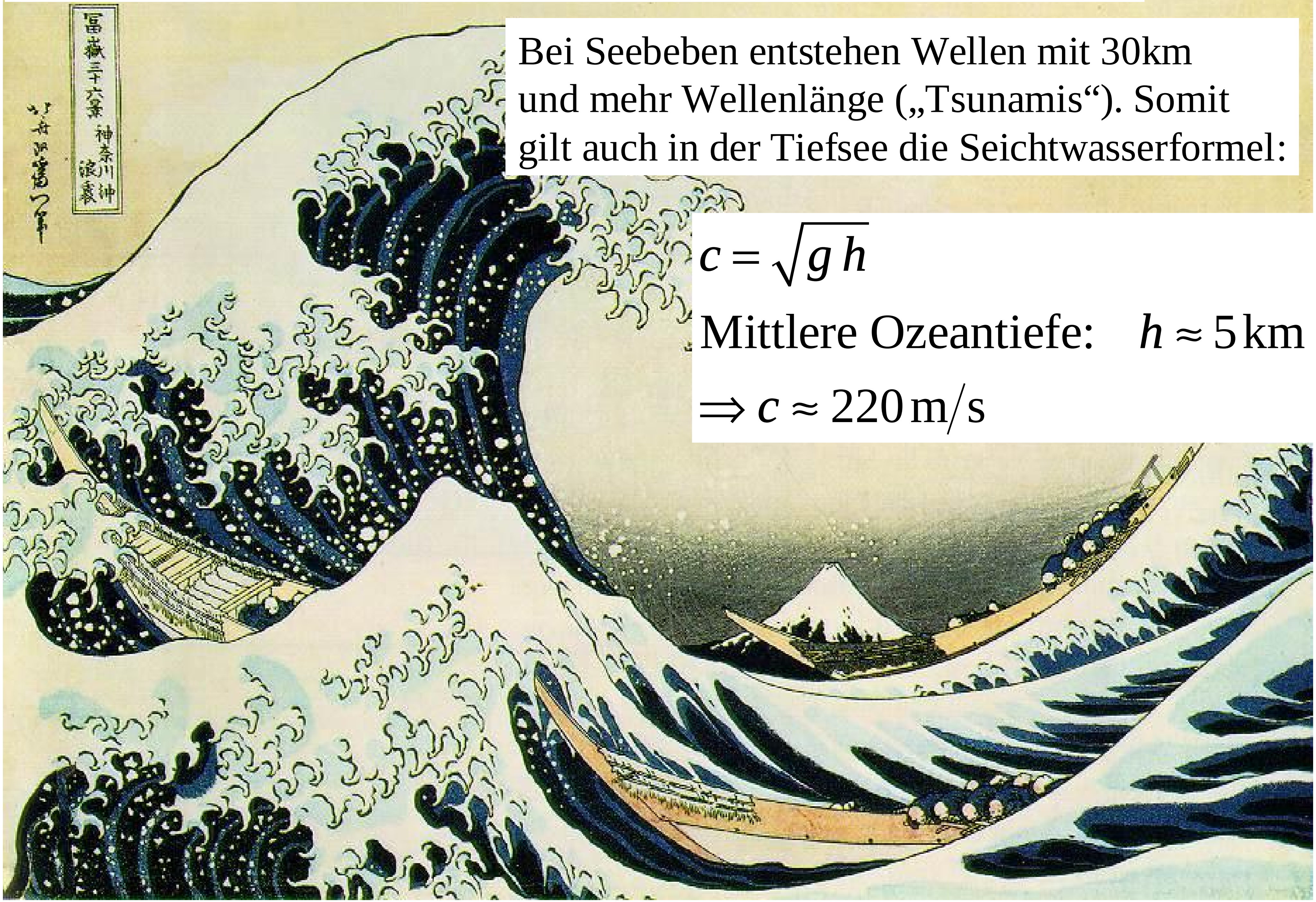
## Beispiel 2: Gibt es eine Maximalgeschwindigkeit für Meereswellen ?

Bei Seebeben entstehen Wellen mit 30km und mehr Wellenlänge („Tsunamis“). Somit gilt auch in der Tiefsee die Seichtwasserformel:

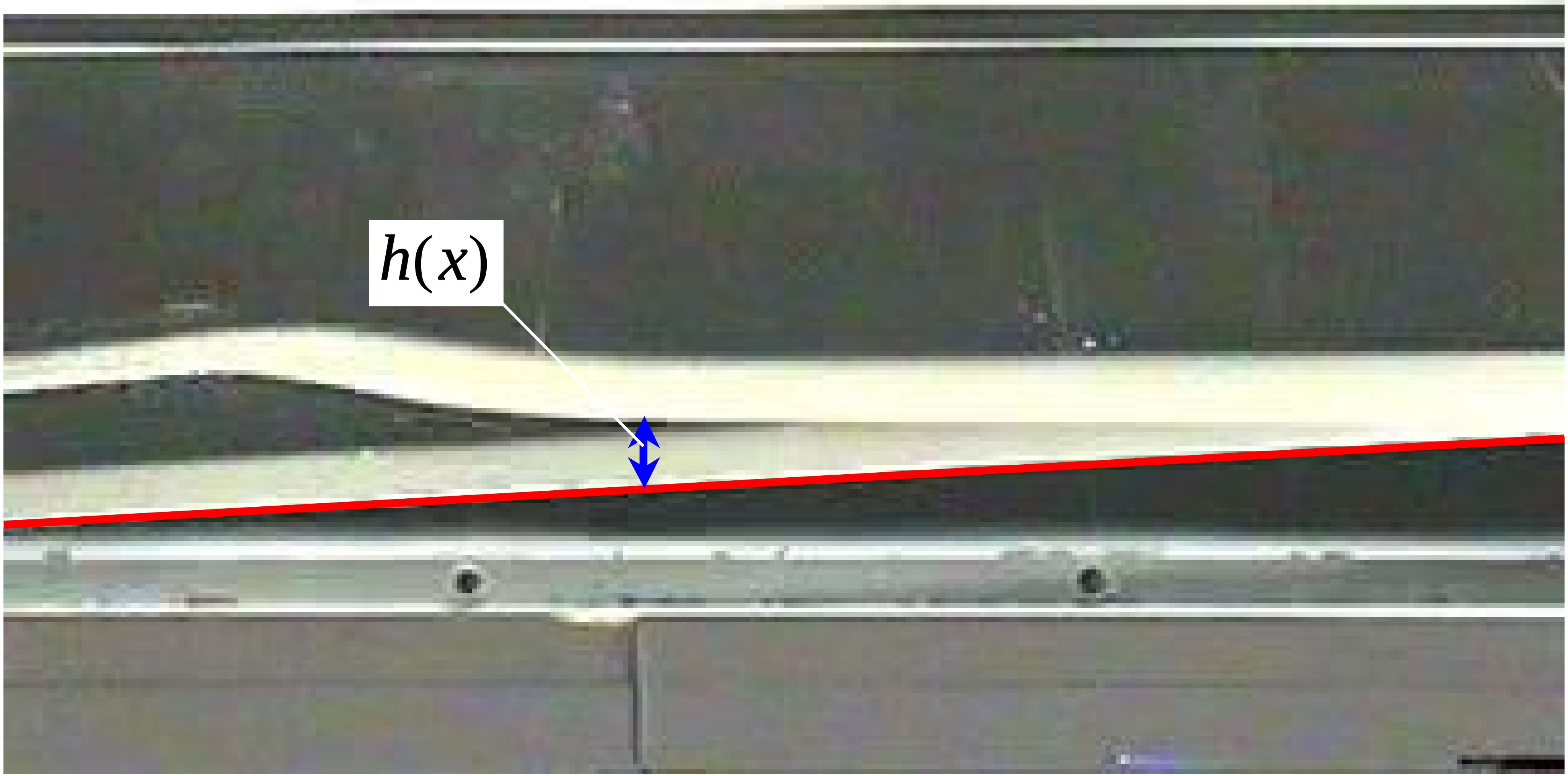
$$c = \sqrt{g\,h}$$

Mittlere Ozeantiefe: $\quad h \approx 5\,\mathrm{km}$

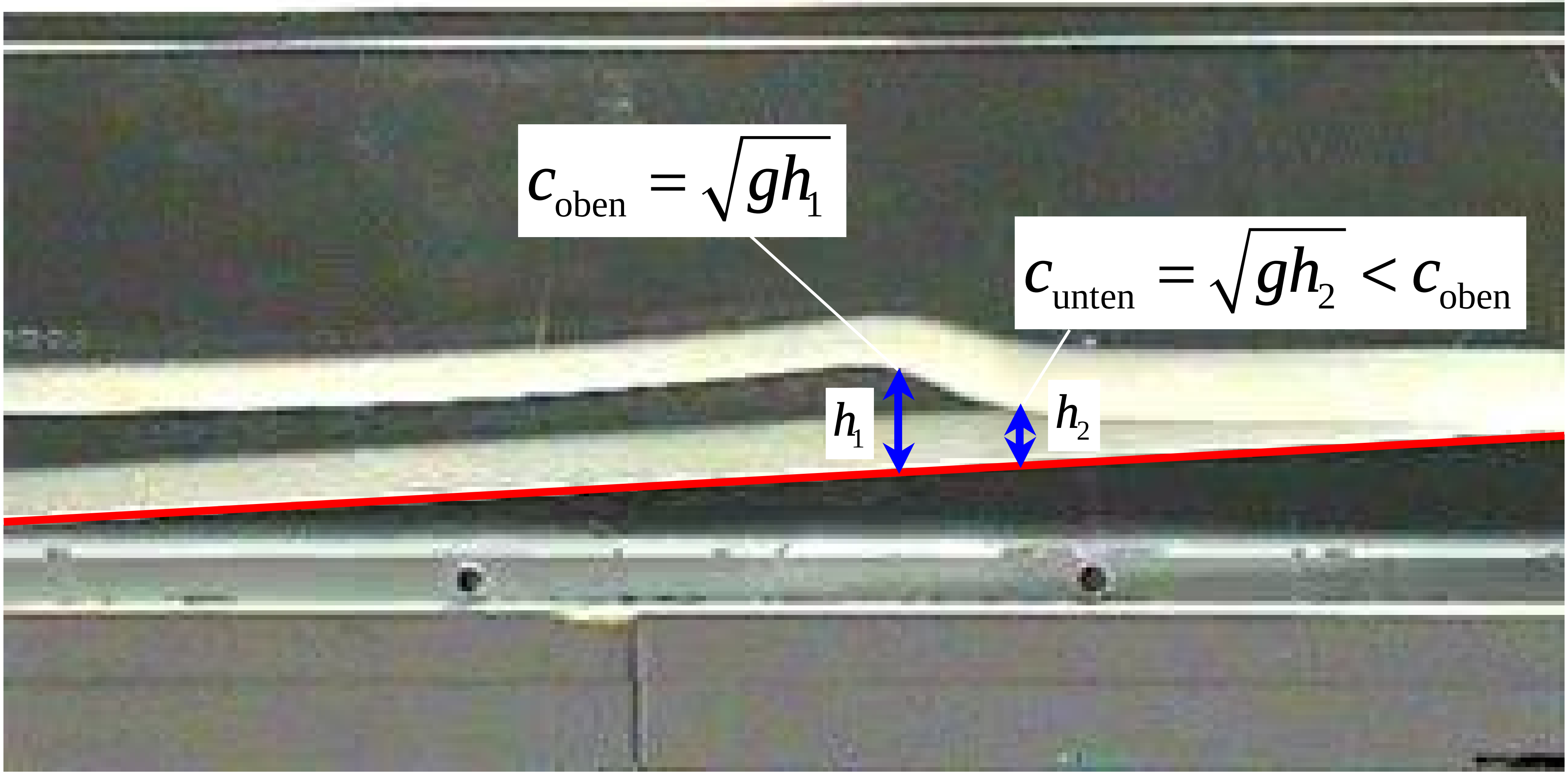
$$\Rightarrow c \approx 220\,\mathrm{m/s}$$



## Beispiel 3: Qualitative Erklärung des Brechens von Brandungswellen (1)

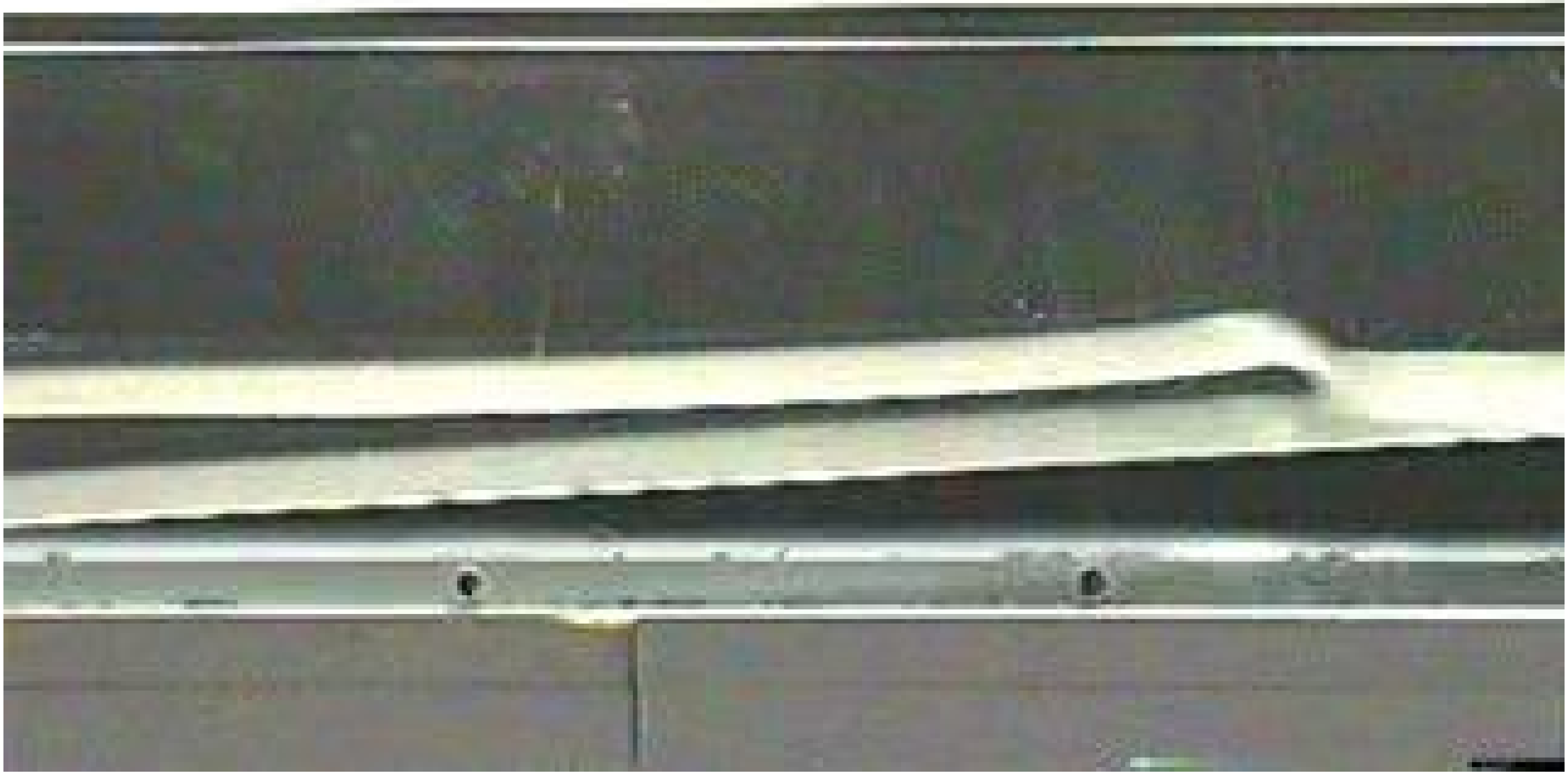


## Beispiel 3: Qualitative Erklärung des Brechens von Brandungswellen (2)

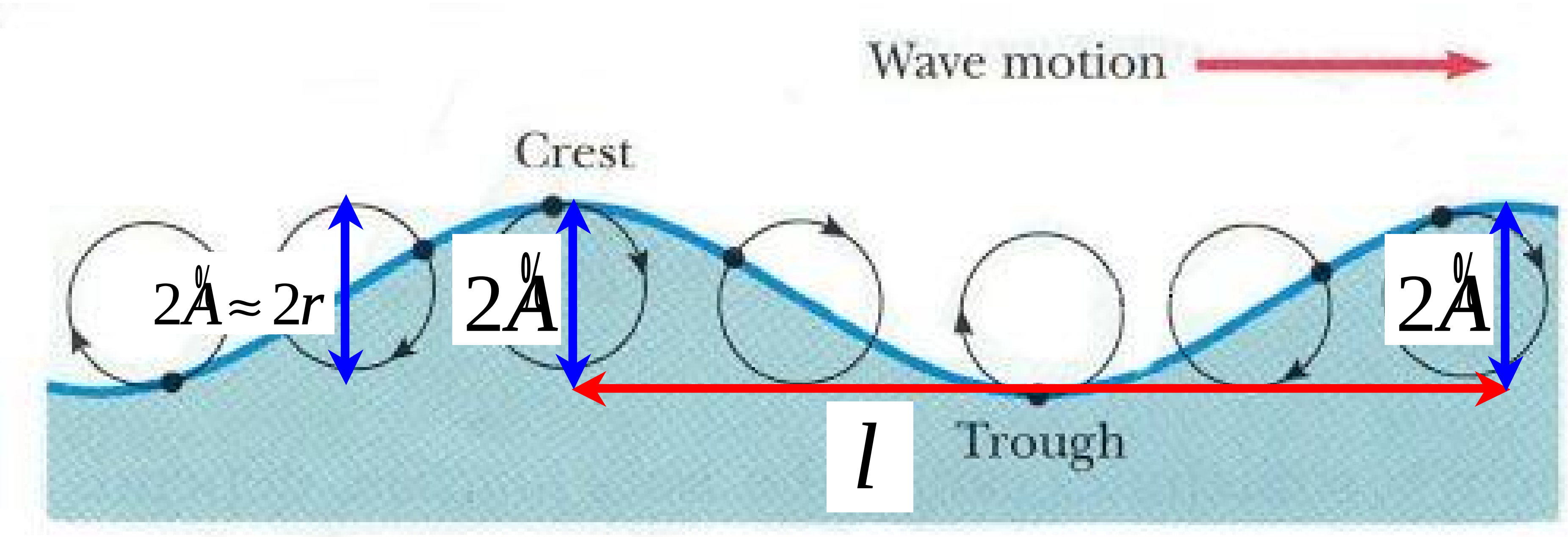


Beispiel 3: Qualitative Erklärung des Brechens von Brandungswellen (3)

Wegen $c_{\mathrm{unten}} < c_{\mathrm{oben}}$ türmt sich die Welle auf und bricht schließlich.



Beispiel 4: Wie hoch können Brecher in der Tiefsee werden?




Das maximale Verhältnis zwischen der Amplitude der Welle und der Wellenlänge ergibt sich, wenn der Kreis abrollt (⇒ Zykloide). Dann gilt:

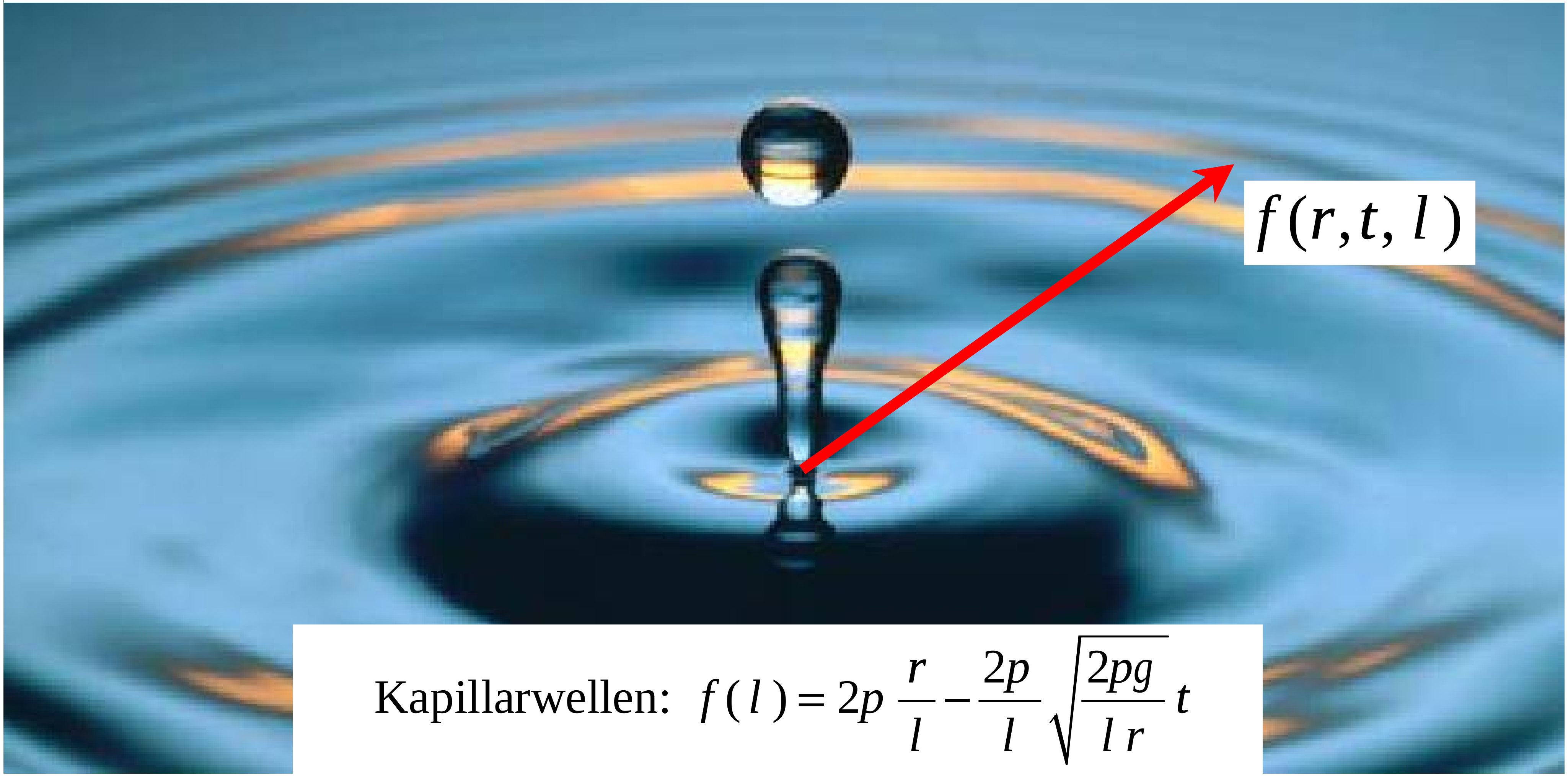
$$\left(\frac{\tilde{A}}{\lambda}\right)_{\max} = \frac{\tilde{A}}{2\pi r} \approx \frac{\tilde{A}}{2\pi \tilde{A}} = \frac{1}{2\pi} \approx \frac{1}{6}$$

Genauere Berechnungen ergeben den kleineren Wert: $\left(\frac{\tilde{A}}{\lambda}\right)_{\max} \approx \frac{1}{8}$

**Beispiel 5:** Ein Tropfen fällt ins Wasser. Wie sehen die erzeugten Wellen aus?

Das Prinzip der "stationären Phase": $A(\vec{r},t) = \left(A_0/r\right)\cos\left(\underbrace{kr-\omega(k)t}_{\varphi(\lambda)}\right)$

Phase der Welle: $\varphi = kr - \omega(k)t = 2\pi\frac{r}{\lambda} - \omega(\lambda)t = 2\pi\frac{r}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda}c(\lambda)t$



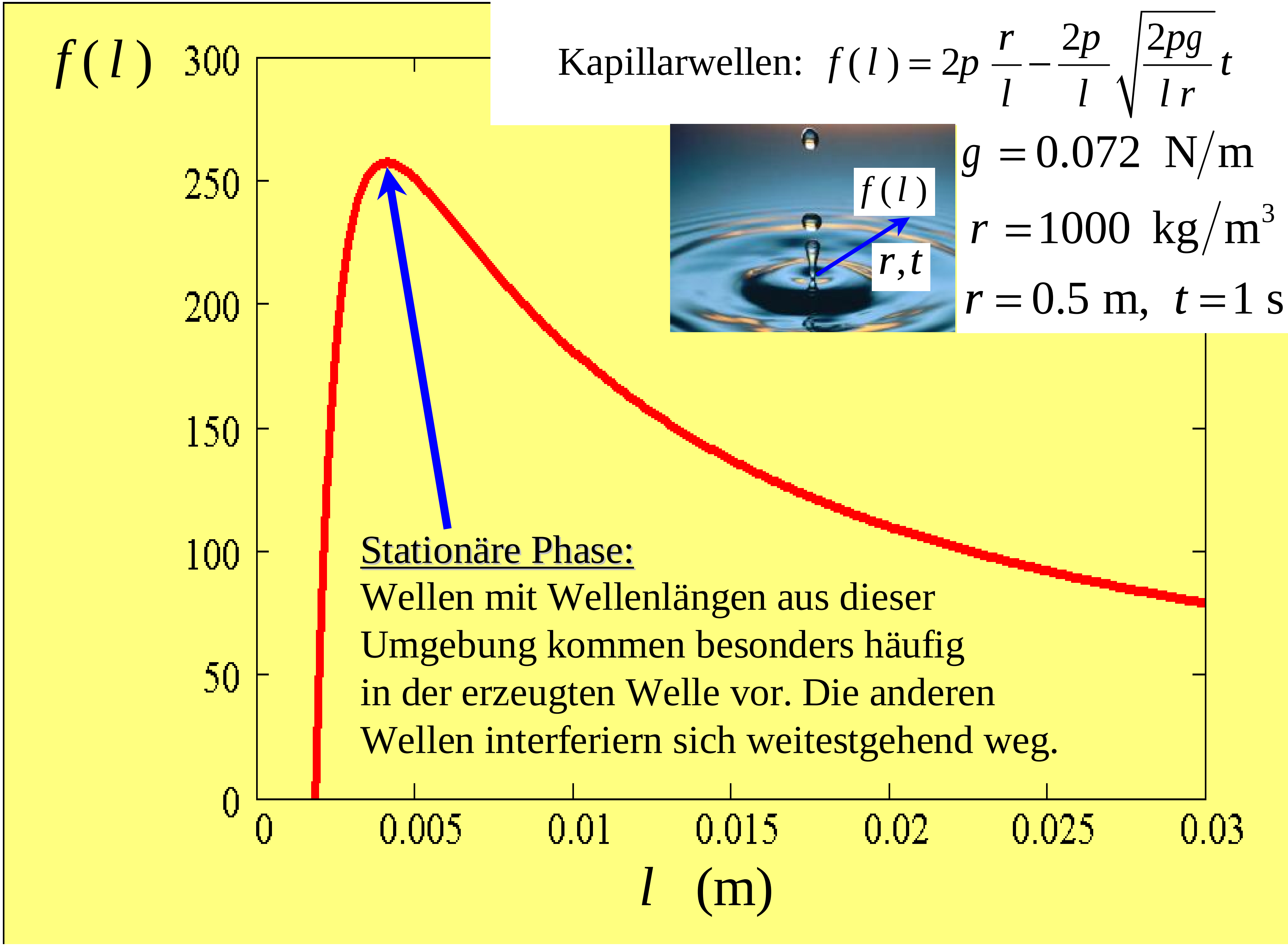

Kapillarwellen: $\varphi(\lambda) = 2\pi\frac{r}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}}\,t$

Kapillarwellen: $f(l) = 2p\,\frac{r}{l} - \frac{2p}{l}\sqrt{\frac{2pg}{l\,r}}\,t$

$g = 0.072\ \mathrm{N/m}$

$r = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$

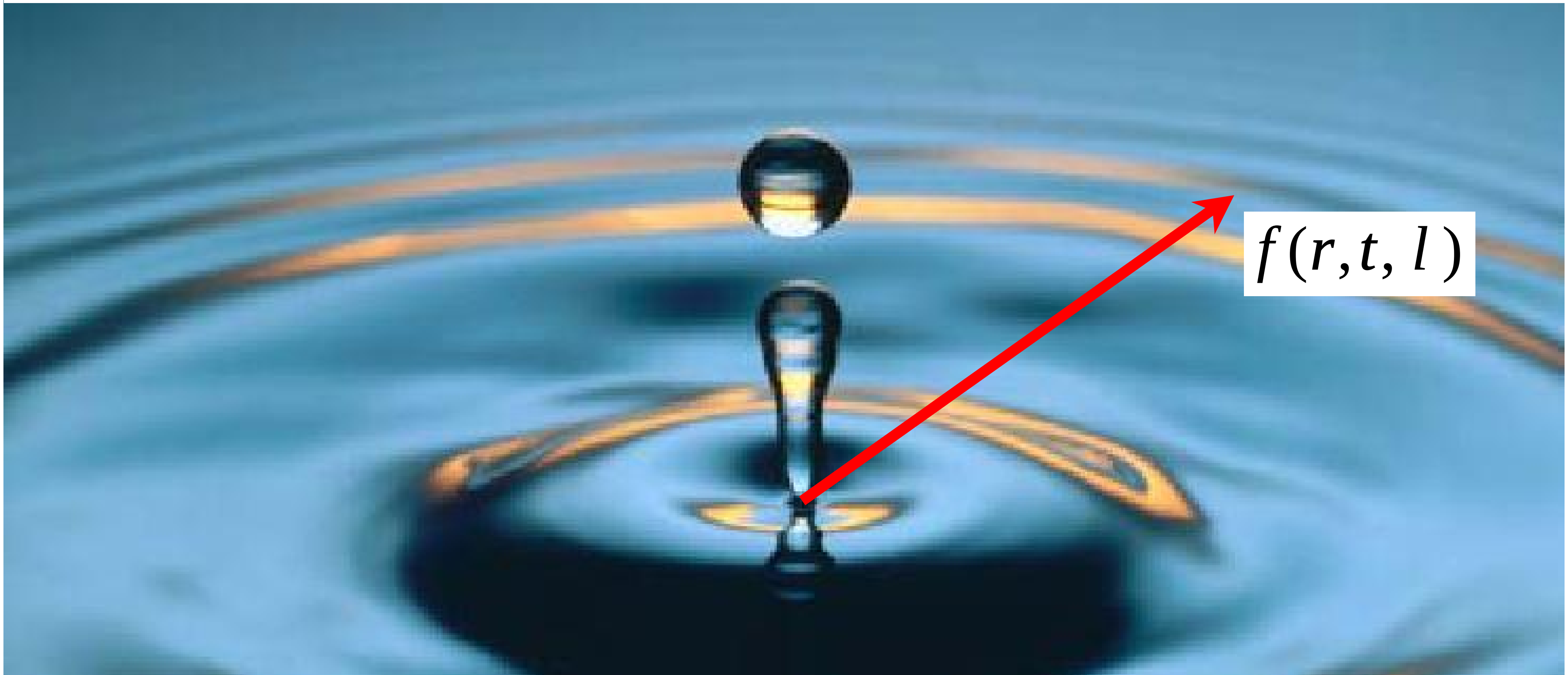
$r = 0.5\ \mathrm{m},\ t = 1\ \mathrm{s}$



Beispiel 5: Ein Trofen fällt ins Wasser. Wie sehen die erzeugten Wellen aus ?

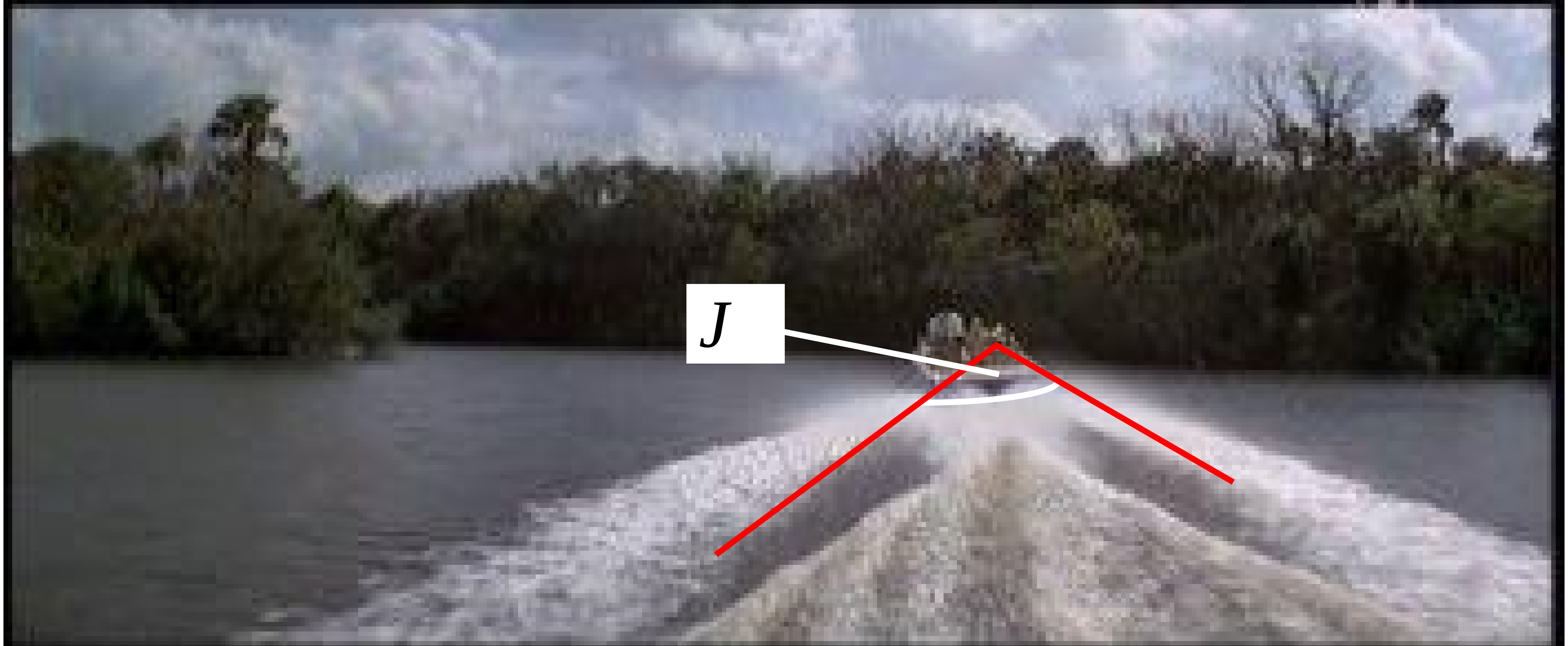
## Das Prinzip der "stationären Phase"

$$\frac{df(l)}{dl} = \frac{2pr}{-l^2} - \frac{-3}{2}\frac{2p}{l^{5/2}}\sqrt{\frac{2pg}{r}}\,t = 0 \Rightarrow -r + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2pg}{l\,r}}\,t = 0 \Rightarrow l \approx 4.5p\,\frac{g}{r}\,\frac{t^2}{r^2}$$

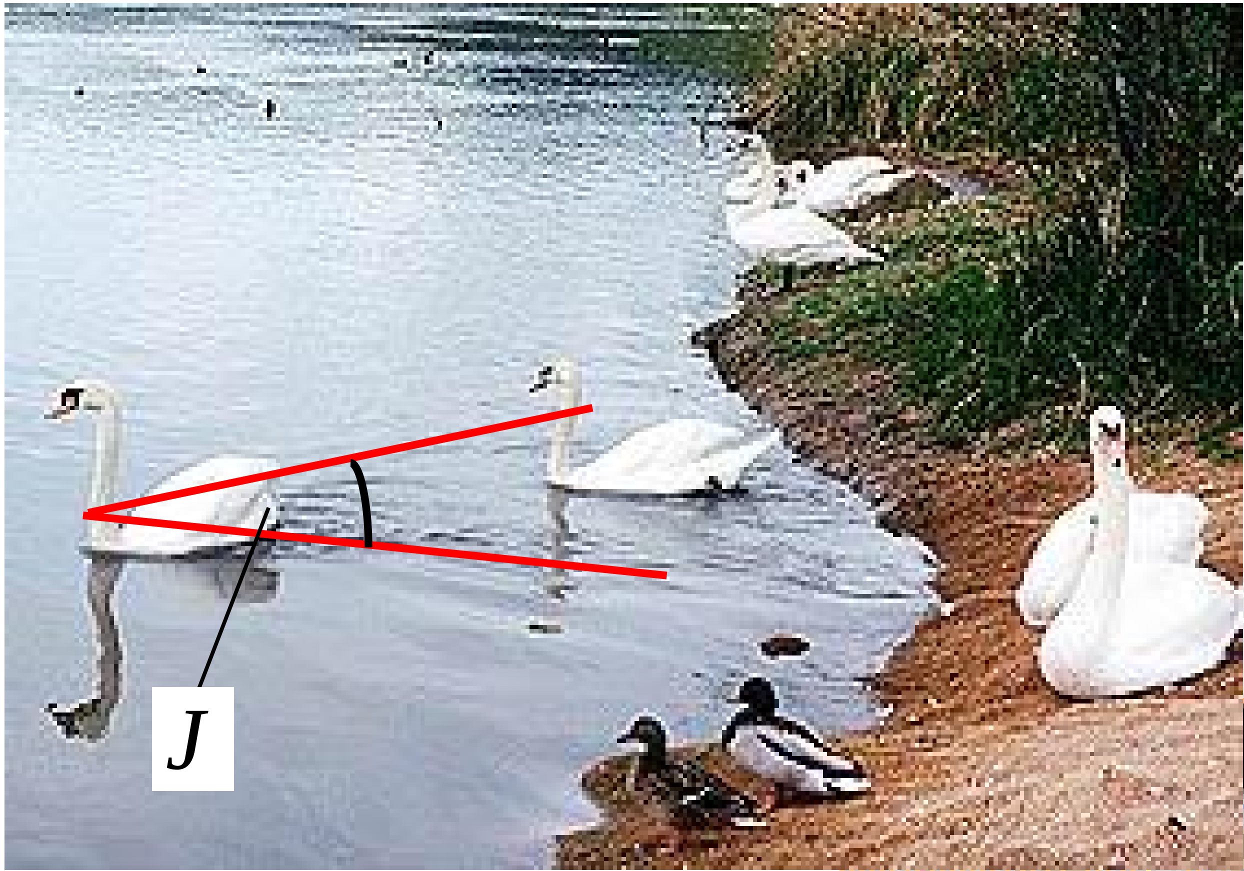



$\Rightarrow$ Die Wellenlänge der erzeugten Kapillarwellen nimmt mit dem Abstand vom Erregerzentrum ab und mit der Zeit zu.

Beispiel 6: Bugwellen beim Schwinmmen/Fahren durch Gewässer

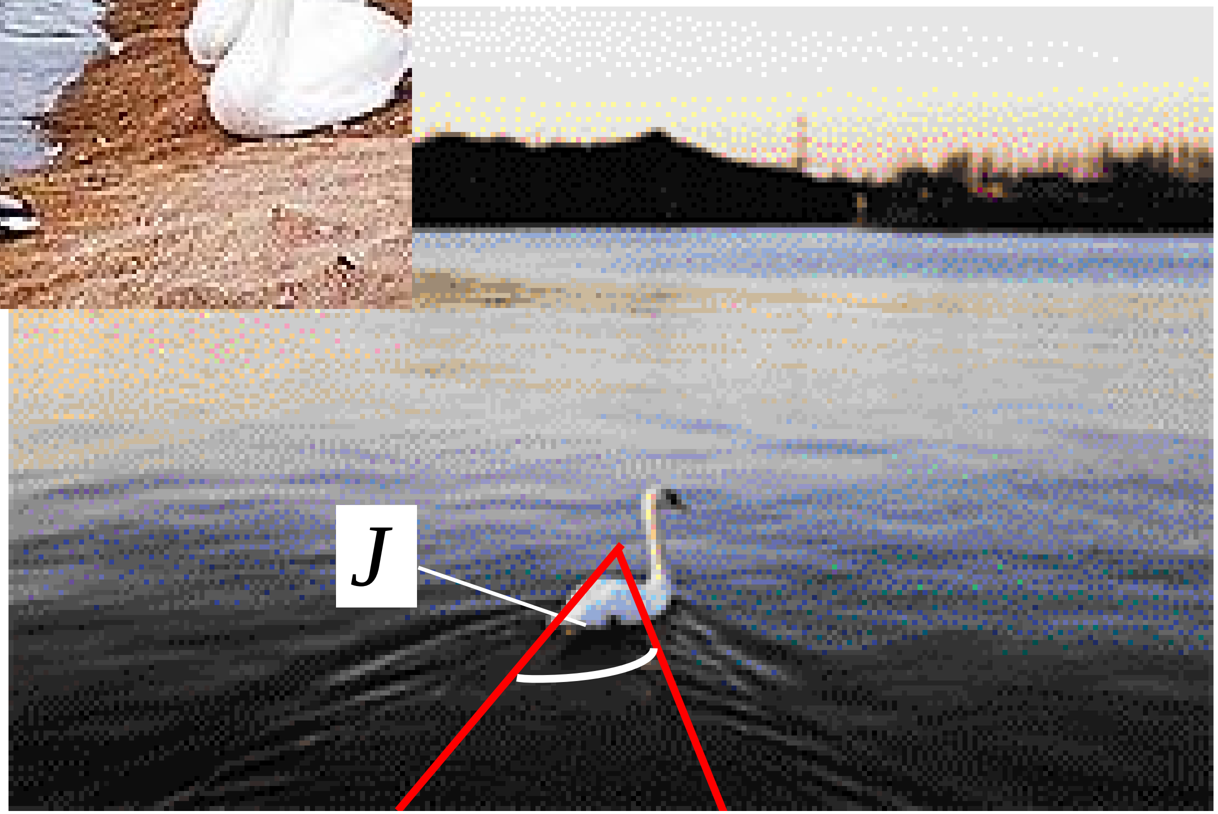



$J \approx 35°$




Diese Bugwellen sind ***keine*** Mach'schen Kegel! Ihr Öffnungswinkel $\vartheta$ ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle etwa $\vartheta \approx 39°$.

Dieser Winkel kann auch mit der Dispersion der Wasserwellen und dem Prinzip der stationären Phase wie in Beispiel 5 erklärt werden.



# PHYSIK III