

§15 Erzwungene Wellen und Green'sche Funktionen

Wie **entstehen** Wellen?

Erinnerung: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit äußerer Kraft

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (1)$$

Lösung für

$$f(t) = A \cos \omega t. \quad (2)$$

Für **große** t ist, unabhängig von den Anfangsbedingungen

$$x(t) = B(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)). \quad (3)$$

In der ω -Abhängigkeit von $B(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ sieht man Resonanzphänomene etc.

Fragen:

- Andere Zeitabhängigkeit des Antriebs?
- Abhängigkeit von Anfangsbedingungen?

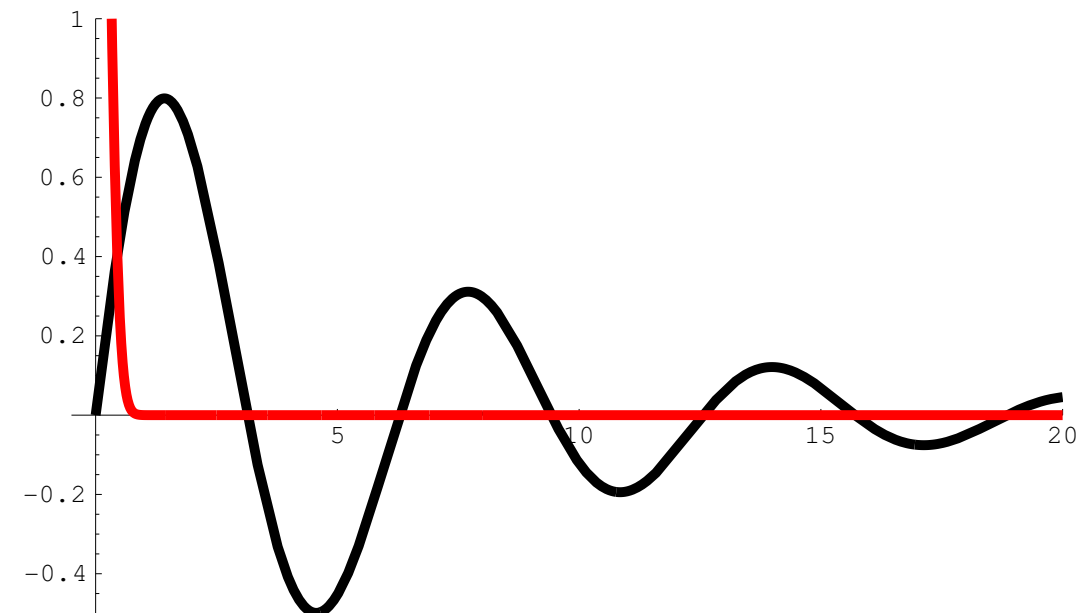
Antwort: Greenfunktion; allgemeines Werkzeug für alle linearen DGLn.

Betrachte Anregung durch einen (infinitesimal) kurzen Kraftstoß

$$f(t) = \delta(t - t') \text{ wobei } x(t) = \dot{x}(t) = 0 \text{ für } t < t'. \quad (4)$$

Dann ist folgendes eine Lösung von (1):

$$x(t) = \theta(t - t') \frac{\sin \omega_1(t - t')}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \text{ mit } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \text{ wenn } \gamma^2 < \omega_0^2 \text{ (Schwingfall)} \quad (5)$$



Verifikation: in den Übungen; dabei lernt/wiederholt man nützliche Eigenschaften der δ - und θ -Funktionen:

$$\frac{d}{dt} \theta(t - t') = \delta(t - t')$$

$$f(t) \frac{d}{dt} \delta(t - t') = -\delta(t - t') \frac{df}{dt}$$

$$\delta(t - t') f(t) = \delta(t - t') f(t')$$

Wie kommt man auf so 'was ???

Reaktion auf $f(t) = \theta(t - t')$ (Einschalten einer Kraft) kann berechnet werden. („Allgemeine homogene plus spezielle inhomogene Lösung“); ebenso auf Abschalten.

Wegen Linearität der DGI ist dann auch die Reaktion auf Einschalten und (kurze Zeit) späteres Ausschalten berechenbar.

Im Grenzfall einer „sehr kurzzeitigen, sehr starken“ Kraft mit einem bestimmten Impulsübertrag erhält man dann $f(t - t') = \delta(t - t')$. Das gefundene $x(t)$ (5) ist also die Reaktion des Oszillators auf einen „Kick“ bei $t = t'$.

Die Funktion

$$g(t, t') := \theta(t - t') \frac{\sin \omega_1(t - t')}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \quad (6)$$

heißt Green'sche Funktion der gewöhnlichen DGI (1) zu den Anfangsbedingungen $x(t) = \dot{x}(t) = 0$ für $t < t'$.

Reaktion auf $f(t) = \theta(t - t')$ (Einschalten einer Kraft) kann berechnet werden. („Allgemeine homogene plus spezielle inhomogene Lösung“); ebenso auf Abschalten.

Wegen Linearität der DGI ist dann auch die Reaktion auf Einschalten und (kurze Zeit) späteres Ausschalten berechenbar.

Im Grenzfall einer „sehr kurzzeitigen, sehr starken“ Kraft mit einem bestimmten Impulsübertrag erhält man dann $f(t - t') = \delta(t - t')$. Das gefundene $x(t)$ (5) ist also die Reaktion des Oszillators auf einen „Kick“ bei $t = t'$.

Die Funktion

$$g(t, t') := \theta(t - t') \frac{\sin \omega_1(t - t')}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \quad (6)$$

heißt **Green'sche Funktion** der gewöhnlichen DGI (1) zu den Anfangsbedingungen $x(t) = \dot{x}(t) = 0$ für $t < t'$.



...und Müller; als Wissenschaftler Autodidakt (1.5 Jahre Schulbesuch bis zum 9. Lebensjahr).

Publizierte 1828 im Selbstverlag

An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.

Die volle Tragweite seiner Erkenntnisse wurde erst viel später erkannt.



... und wozu das alles?

Zerlege **beliebige** Kraft in **Kicks**:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t - t') f(t') \quad (7)$$

und da für die Greenfunktion (6) gilt

$$\frac{d^2}{dt^2}g + 2\gamma \frac{d}{dt}g + \omega_0^2 g = \delta(t - t') \quad (8)$$

kann man (1) durch **Superposition** lösen:

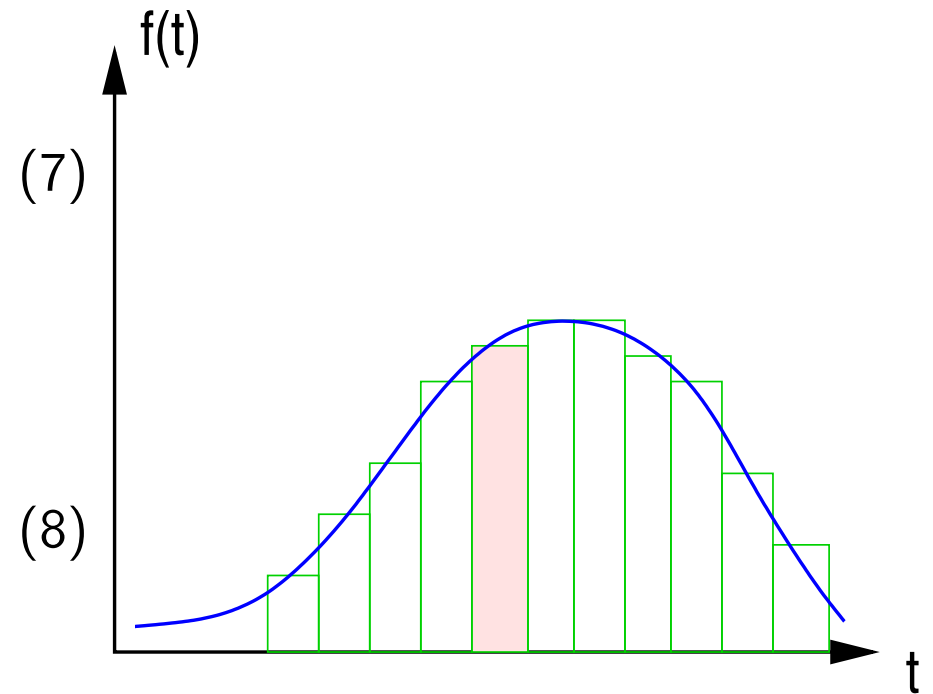
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t - t') f(t') = \int_{-\infty}^t dt' g(t - t') f(t') \quad (9)$$

(Die θ -Funktion in der Greenfunktion schneidet das Integral oben ab.)

Beachte: (9) ist ein **Faltungsintegral** (vgl. §7), sodass **Fouriertechniken** zur Berechnung verwendet werden können.

Greenfunktion: Reaktion auf Anregung zu einer bestimmten **Zeit**.

Die „übliche“ Behandlung des getriebenen Oszillators liefert Reaktion auf Anregung mit einer bestimmten **Frequenz**. Zusammenhang zwischen beiden: Fourier.



Merke: Die Greenfunktion löst eine DGI in t mit δ -Inhomogenität und gegebenen **Anfangs**bedingungen.

Analog: DGI in \vec{r} mit δ -Inhomogenität und gegebenen **Rand**bedingungen; ein Beispiel aus der Elektrostatik: Die **Poissongleichung**

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{mit Randbedingung} \quad \phi(|\vec{r}| \rightarrow \infty) = 0$$

wird für gegebene Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ gelöst von

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Also: „Das Coulombpotential einer Punktladung ist die Greenfunktion der Poissongleichung mit Dirichlet-Randbedingungen im Unendlichen“.

Andere Randbedingungen führen zu anderen Greenfunktionen!

Die Wellengleichung mit Quellen

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \quad \text{mit bestimmten Anfangs-/Randbedingungen.} \quad (10)$$

Wegen Linearität gilt, wie immer

$$u_{\text{allgemein, inhomogen}} = \underbrace{u_{\text{allgemein, homogen}}}_{\text{bekannt}} + \underbrace{u_{\text{speziell, inhomogen}}}_{\text{Hier hilft Green!}}$$

Die Greenfunktion $G(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ ist die Lösung von

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_r \right) G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'), \quad (11)$$

wobei Δ_r **nur** auf \vec{r} wirkt. Dann ist eine spezielle Lösung von (10)

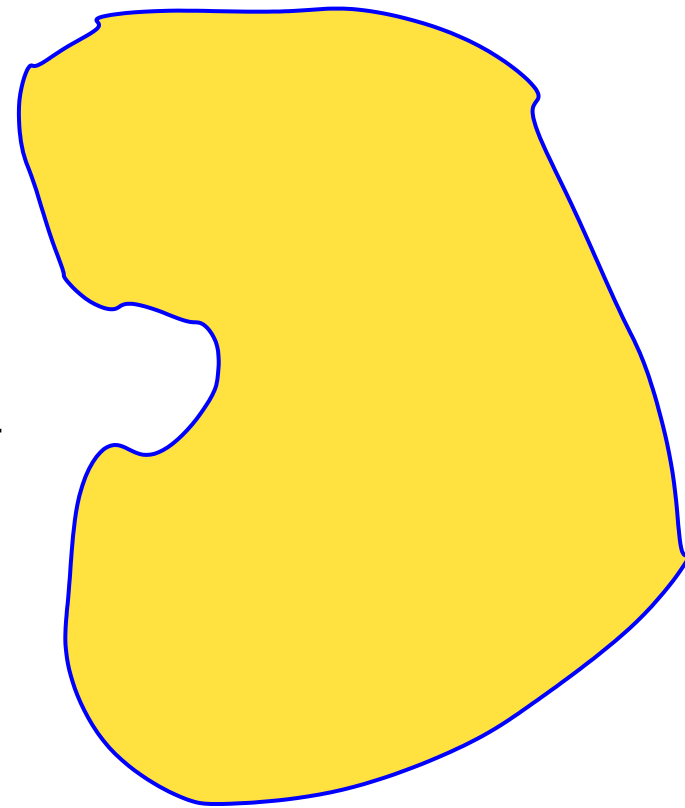
$$u_{\text{speziell, inhomogen}} = \int d^3r' dt' G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') f(\vec{r}', t'). \quad (12)$$

Überprüfung: (12) in (10), $\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)$ unters Integral, fertig.

$G(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ muss für \vec{r} am Rand die gegebenen Randbedingungen erfüllen, was für endliche Gebiete besonders bei unregelmäßigen Rändern **erhebliche** Probleme machen kann.

Darum betrachten wir ab sofort die Randbedingung $G \rightarrow 0$ im Unendlichen. Dann ist aber **kein \vec{r} ausgezeichnet** und G kann nur von $\vec{r} - \vec{r}'$ abhängen. Analog kann man für die Zeit argumentieren, und erhält

$$G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \quad (13)$$



Zu lösen ist dann (Variablen umbenannt, $t - t' \rightarrow t$ usw.)

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) G(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r}) \delta(t), \quad \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} G(\vec{r}, t) = 0. \quad (14)$$

Die Lösung erfolgt mithilfe der **Fouriertransformation** (§7; jetzt dreidimensional). Die δ -Funktion besitzt die Fourierdarstellung

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (15)$$

und die Greenfunktion

$$G(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{G}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (16)$$

mit noch zu bestimmendem $\tilde{G}(\vec{k}, t)$. Einsetzen in (14) liefert
($\nabla \rightarrow i\vec{k}$ unter Fouriertransformation)

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) \tilde{G}(\vec{k}, t) = \delta(t); \quad \text{zu vergleichen mit (8) für } \gamma \rightarrow 0 : \quad \frac{d^2}{dt^2} g + \omega_0^2 g = \delta(t). \quad (17)$$

Vergleich mit der Greenfunktion (6) für $\gamma \rightarrow 0$ liefert die Lösung

$$\tilde{G}(\vec{k}, t) = v^2 \theta(t) \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k}; \quad \omega_k = v |\vec{k}| \quad (18)$$

Dies ist die so genannte **retardierte** Lösung; es gibt auch noch eine **avancierte**, mit $-\theta(-t)$ statt $\theta(t)$, die wir hier nicht betrachten.

Fast fertig ! Es muss nur noch gemäß (16) in den Ortsraum zurücktransformiert werden....

Eine Nebenrechnung liefert

$$G(\vec{r}, t) = \frac{v\theta(t)}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\sin v|\vec{k}|t}{|\vec{k}|} = \frac{\theta(t)}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

$\left(= \frac{\theta(\pm t)}{4\pi r} \delta\left(|t| - \frac{r}{v}\right) \text{ wenn die avancierte Lösung mit berücksichtigt wird} \right).$ (19)

Was lehrt uns das ?

- Die spezielle Lösung (12) der inhomogenen Wellengleichung liefert mit der Greenfunktion (19)

$$u_{\text{speziell, inhomogen}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{f\left(\vec{r}', t \mp \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}; \quad (20)$$

vgl. retardierte / avancierte („+“) Potentiale in der Elektrodynamik.

- Die dreidimensionale Greenfunktion (19) der Wellengleichung ist nur $\neq 0$ genau auf dem Lichtkegel $t^2 v^2 = r^2$. Der Beobachter sieht den Zustand der Quelle (bei \vec{r}') zu einem bestimmten Zeitpunkt $t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}$ der Vergangenheit.
- Die Greenfunktion fällt $\sim |\vec{r}|^{-1}$ ab. (Energieerhaltung!)

...und wenn die Welt flach wäre ?

(vgl. E.A. Abbott, *Flatland* (1884) <http://www.uh.edu/engines/epi783.htm>)

- Die Greenfunktion in 2D (x, y) erhält man aus der für 3D durch **Integration** über z . Dazu schreibt man die DGL in der Form

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(\vec{r}, t) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)$$

und integriert über alle z :

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dz G(\vec{r}, t) - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(\vec{r}, t)}_{\frac{\partial}{\partial z} G(\vec{r}, t) \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} = 0} = \delta(x)\delta(y)\delta(t).$$

Damit ist die 2D Greenfunktion

$$G(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dz G(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\theta(t)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \delta\left(t - \frac{1}{v} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

Die z -Integration kann man nicht sofort durchführen, da z auf komplizierte Weise im Argument der δ -Funktion auftritt. Hier hilft die Regel

$$\delta(f(z)) = \sum_i \frac{\delta(z - z_i)}{|f'(z_i)|} \quad (f(z_i) = 0, f'(z_i) \neq 0; z_i \text{ reell}).$$

Es müssen also die Nullstellen des Arguments der δ -Funktion gesucht werden; diese sind $z_{\pm} = \pm \sqrt{(vt)^2 - x^2 - y^2}$, vorausgesetzt es ist $|vt| > \sqrt{x^2 + y^2}$. Damit ist

$$\frac{\delta\left(t - \frac{1}{v}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{v \theta\left(|t| - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v}\right)}{\sqrt{(vt)^2 - x^2 - y^2}} (\delta(z - z_+) + \delta(z - z_-))$$

und die (retardierte) 2D Greenfunktion ergibt sich zu

$$G(x, y, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi} \frac{\theta\left(t - \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{v^2}}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{x^2 + y^2}{v^2}}} \quad (21)$$

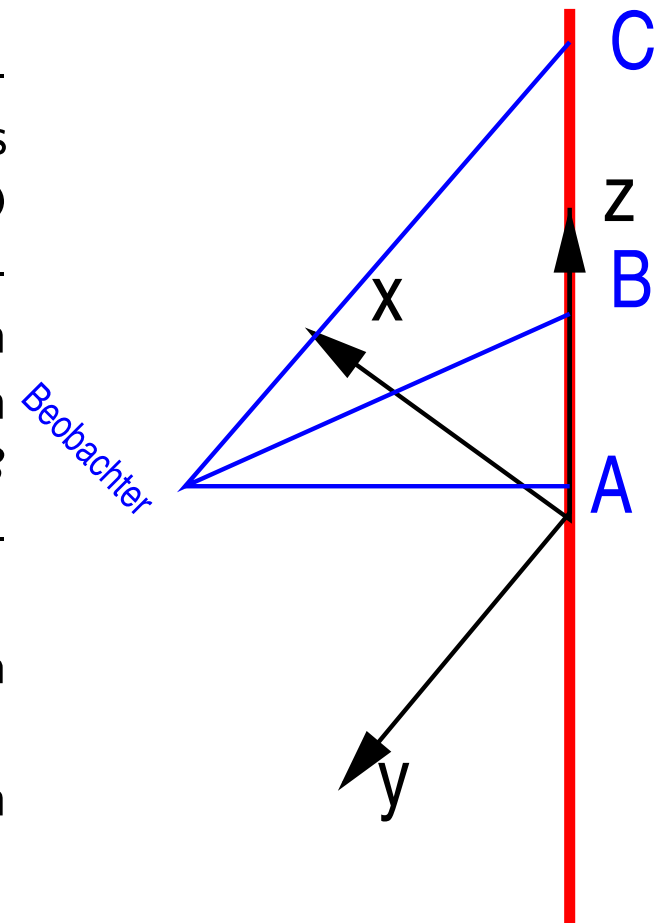
- Diese Greenfunktion ist **auch im Innern des Lichtkegels $\neq 0$** . Für festen Abstand zur Quelle und lange Zeiten t klingt sie wie t^{-1} ab.

- Im Gegensatz zum 3D-Fall sieht der Beobachter hier eine Überlagerung vieler vergangener Zustände der Quelle. Um sich das plausibel zu machen, betrachte man die Konstruktion der 2D Greenfunktion durch Integration über z geometrisch. Eine unendlich entlang der z -Achse ausgedehnte Quelle in 3D wird von einem Beobachter in der (x, y) -Ebene betrachtet. Dieser sieht den Zustand des Punkts A der Quelle zur Zeit t_A , den Punkt B (schwächer) zur Zeit $t_B > t_A$, usw. Dies führt zu dem beobachteten „Afterglow“.
- Anwendung auf **Wasserwellen** nicht unmittelbar möglich, da diese **dispersiv** sind: v ist unterschiedlich für verschiedene $|\vec{k}|$.
- Die 1D Greenfunktion ergibt sich durch nochmalige Integration (über y)

$$G(x, t) = \frac{v}{2} \theta(t) \theta \left(t - \frac{|x|}{v} \right). \quad (22)$$

Diese Funktion klingt mit Abstand oder Zeit **nicht** mehr ab.

- Da Greenfunktionen die „Ursache“ als „Wirkung“ zum Beobachter befördern, heißen sie oft auch **Propagatoren**.
- Anwendungsbereich: **Alles vom gedämpften Oszillator bis zur Quantenchromodynamik.**



Literatur

J.B. Marion, Classical Dynamics of Particles and Systems, Chap. 4 (Getriebener Oszillator)

Kuypers, Klasische Mechanik, Kap. 14 (Getriebener Oszillator; auch zur δ -Funktion)

Gabriel Barton, Elements of Green's Functions and Propagation, speziell Kap. 11 (zur Wellengleichung, *sehr* viel mehr als wir hier benötigen)

E. Butkov, Mathematical Physics, Kap. ?? (auch mehr als wir brauchen)

Lawrie Challis und Fred Sheard, The Green of Green Functions, *Physics Today*, Heft 12/2003 (Artikel über Person und Bedeutung von George Green)

www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Green.html